

**Методология.** При проведении математического эксперимента был использован рототабельный план второго порядка, который позволяет наиболее эффективно решить поставленную задачу оценки влияния исследуемых факторов на погонное усилие резания.

**Результат.** Полученные уравнения регрессии определения суммарной величины потерь на процесс продольной резания (на транспортировку и разрезания материала) и величины потерь на трение материала (транспортировки). Это позволяет определить одну из физико-механических характеристик войлока, а именно погоне усилия резания, и принять его значение при проектировании привода в машинах для продольной резания материала.

**Ключевые слова:** погонное усилие, суммарная величина потерь, потери на трение материала, валики, кромка лезвия ножа.

## **DETERMINATION OF LINEAR FORCE OF FELT CUTTING USING A KNIFE WITH A DOUBLE-SIDED SHARPENING**

МАКАТОРА Д., ПАНАСЮК І.

*Kyiv National University of Technologies and Design*

**The purpose** of the study is to develop a simple and effective method of the analysis of the impact the gap between the rollers and the value of the distance from the vertical axis of the rollers rotation to the edge of the knife blade have on linear force of felt cutting by using regression equations. The research has been conducted by means of the experimental setup for longitudinal cutting machine using a knife with a double-sided sharpening.

The mathematical experiment has been conducted by utilizing the plan of the second order allowing to efficiently solve the task of assessment of the impact of the researched factors on linear force of cutting.

**The results** of regression equation determining the total value of both longitudinal cutting losses and magnitude losses due to material friction have been got. These results help to determine the linear force of cutting as one of the physical and mechanical properties of felt, and to consider its importance in the design of drives in machines for a material longitudinal cutting.

**Keywords:** linear force, the total value of losses, the loss of friction material, rollers, knife blade edge.

УДК 539.3

СУРЬЯНИНОВ Н.Г., КОРНИЕНКО Ю.В.

Одесский национальный политехнический университет

## **ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

*Получена полная система фундаментальных решений задачи о изгибе замкнутой круговой цилиндрической оболочки под действием осесимметричной нагрузки. Задача решена с использованием нового подхода — численно-аналитического метода граничных элементов. Отмечена высокая эффективность метода, кратко изложена его суть.*

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, метод граничных элементов, осесимметричный изгиб, фундаментальная функция.

Большинство задач строительной механики, связанных с исследованием напряженно-деформированного состояния конструкций и их элементов, сводится, как правило, к одному или нескольким дифференциальным уравнениям. Решения этих уравнений в замкнутом виде удается получить далеко не всегда. Эффективным оказывается применение нового подхода — численно-аналитического метода граничных элементов.

Объектом исследования является замкнутая круговая цилиндрическая оболочка, подверженная воздействию осесимметричной нагрузки. Для определения напряженно-деформированного состояния оболочки используется численно-аналитический метод граничных элементов.

**Постановка задачи.** Цилиндрические оболочки являются одним из наиболее распространенных видов тонкостенных пространственных конструкций. Требования к обеспечению необходимой прочности и устойчивости оболочечных конструкций вызывают необходимость в разработке методов и алгоритмов расчета их напряженно-деформированного состояния с последующей компьютерной реализацией.

Нами разрабатывается новый подход к расчету цилиндрических оболочек на основе использования численно-аналитического метода граничных элементов (ЧА МГЭ), который наиболее полно изложен в двухтомной монографии [3].

Привлекательность ЧА МГЭ обусловлена рядом причин. Дискретизация только границы области, занимаемой объектом, резко уменьшает порядок системы разрешающих уравнений; есть возможность снижения мерности решаемой задачи. Кроме того, метод строго обоснован математически, т.к. использует фундаментальные решения дифференциальных уравнений, а, значит, в рамках принимаемых гипотез позволяет получить точные значения параметров задачи внутри области. Отметим также простоту логики алгоритма, хорошую сходимость решения, высокую устойчивость и малое накопление погрешностей при численных операциях.

Сущность ЧА МГЭ состоит в первоначальной дискретизации линейной системы на простейшие модули. После анализа состояния всех модулей системы выполняется их синтез и обратный переход к рассматриваемой системе. Под модулем понимается стержень – для стержневых систем и обобщенный стержень — для пластинчатых и оболочечных систем. Каждый модуль, как одномерное физическое тело, имеет только две граничные точки —  $x=0$  и  $x=l$ . Метод опирается на решение дифференциальных уравнений задачи в форме методов начальных параметров. Для реализации разработанных алгоритмов авторами используется свободно распространяемая программа Scilab [1], но можно также применять MATLAB [2] или DELPHI [4].

Одной из важнейших составляющих алгоритма ЧА МГЭ является система ортонормированных фундаментальных функций [3], получение которой для рассматриваемой задачи и является целью данной работы.

**Результаты и их обсуждение.** Упругая поверхность круговой цилиндрической оболочки, ограниченной по концам торцевыми диафрагмами и нагруженной всесторонним равномерным внешним давлением  $p$  (рис. 1), определяется уравнением

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{pr}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Eh}{r^2} w = p \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right), \quad (1)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  — цилиндрическая жесткость;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $h$  — толщина оболочки;  $r$  — радиус.

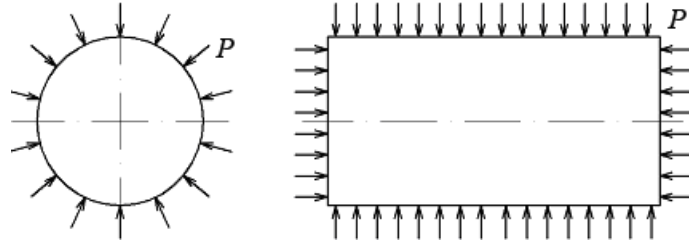


Рис. 1. Замкнутая круговая цилиндрическая оболочка, нагруженная всесторонним внешним равномерно распределенным давлением

Заметим, что дифференциальное уравнение (1) по своей структуре представляет уравнение изгиба призматической балки жесткости  $EI = D$ , лежащей на сплошном упругом основании жесткостью

$$k = \frac{Eh}{r^2}, \quad (2)$$

нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью

$$q = p \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right) \quad (3)$$

и продольной силой

$$T = -\frac{pr}{2}. \quad (4)$$

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (1) является биквадратным:

$$Dk^4 + \frac{pr}{2}k^2 + \frac{Eh}{r^2} = 0, \quad k^2 = t; \quad (5)$$

$$Dt^2 + \frac{pr}{2}t + \frac{Eh}{r^2} = 0,$$

корни которого

$$t_{1,2} = \frac{-\frac{pr}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{pr}{2}\right)^2 - 4D\frac{Eh}{r^2}}}{2D}; \quad k_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-\frac{pr}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{pr}{2}\right)^2 - 4D\frac{Eh}{r^2}}}{2D}}. \quad (6)$$

Определим фундаментальные ортонормированные функции задачи при всех возможных вариантах корней характеристического уравнения.

Вариант 1. Корни комплексные (соответствует малым давлениям):

$$k_{1,2,3,4} = \pm a \pm ib, \quad (7)$$

где

$$a = \alpha \sqrt{1+\beta}; \quad b = \alpha \sqrt{1-\beta}; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4D}}; \quad \beta = -\frac{\frac{pr}{2}}{2\sqrt{Dk}}. \quad (8)$$

Вариант 2. Мнимые корни:

$$k_{1,2} = \pm ia; \quad k_{3,4} = \pm ib. \quad (9)$$

Этот вариант корней также соответствует сжатию оболочки.

Вариант 3. Четыре действительных корня:

$$k_{1,2} = \pm a; \quad k_{3,4} = \pm b. \quad (10)$$

Этот вариант корней соответствует растяжению оболочки.

Вариант 4. Два действительных корня и два мнимых:

$$k_{1,2} = \pm a; \quad k_{3,4} = \pm ib. \quad (11)$$

Этот вариант корней также соответствует растяжению оболочки.

Функция  $w(x)$  имеет вид

$$w(x) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4.$$

Для первого варианта корней  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  — гиперголо-тригонометрические функции:

$$\Phi_1 = chax \sin bx; \quad \Phi_2 = chax \cos bx; \quad \Phi_3 = shax \cos bx; \quad \Phi_4 = shax \sin bx.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\Phi_2(0) = 1, \quad \Phi_1(0) = \Phi_3(0) = \Phi_4(0) = 0.$$

Производные функции прогибов:

$$w'(x) = C_1(a\Phi_4 + b\Phi_2) + C_2(a\Phi_3 - b\Phi_1) + C_3(a\Phi_2 - b\Phi_4) + C_4(a\Phi_1 + b\Phi_3);$$

$$w''(x) = C_1[(a^2 - b^2)\Phi_1 + 2ab\Phi_3] + C_2[(a^2 - b^2)\Phi_2 - 2ab\Phi_4] + \\ + C_3[(a^2 - b^2)\Phi_3 - 2ab\Phi_1] + C_4[(a^2 - b^2)\Phi_4 + 2ab\Phi_2];$$

$$w'''(x) = C_1[a(a^2 - 3b^2)\Phi_4 - b(b^2 - 3a^2)\Phi_2] + C_2[a(a^2 - 3b^2)\Phi_3 + b(b^2 - 3a^2)\Phi_1] + \\ + C_3[a(a^2 - 3b^2)\Phi_2 + b(b^2 - 3a^2)\Phi_4] + C_4[a(a^2 - 3b^2)\Phi_1 - b(b^2 - 3a^2)\Phi_3];$$

Изгибающий момент и поперечная сила:

$$-\frac{M}{D} = w'' + T^* w' = C_1[(a^2 - b^2 + T^*)\Phi_1 + 2ab\Phi_3] + C_2[(a^2 - b^2 + T^*)\Phi_2 - 2ab\Phi_4] + \\ + C_3[(a^2 - b^2 + T^*)\Phi_3 - 2ab\Phi_1] + C_4[(a^2 - b^2 + T^*)\Phi_4 + 2ab\Phi_2];$$

$$-\frac{Q}{D} = w''' + T^* w'' = C_1[a(a^2 - 3b^2 + T^*)\Phi_4 + b(3a^2 - b^2 + T^*)\Phi_2] + C_2[a(a^2 - 3b^2 + T^*)\Phi_3 - b(3a^2 - b^2 + T^*)\Phi_1] + \\ + C_3[a(a^2 - 3b^2 + T^*)\Phi_2 - b(3a^2 - b^2 + T^*)\Phi_4] + C_4[a(a^2 - 3b^2 + T^*)\Phi_1 + b(3a^2 - b^2 + T^*)\Phi_3];$$

где  $T^* = T/D$ .

Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  можно определить из соотношения

0	1	0	0	$C_1$	$v_0$	(12)
$b$	0	$a$	0	$C_2$	$\varphi_0$	
0	$a^2 - b^2 + T^*$	0	$2ab$	$C_3$	$-\frac{M_0}{D}$	
$b(3a^2 - b^2 + T^*)$	0	$b(a^2 - 3b^2 + T^*)$	0	$C_4$	$-\frac{Q_0}{D}$	

Решая уравнения (12), получим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{a^2 - 3b^2 + T^*}{2b(a^2 + b^2)} \varphi_o - \frac{1}{2bD(a^2 + b^2)} Q_o; \\ C_2 &= w_o; \\ C_3 &= \frac{3a^2 - b^2 + T^*}{2a(a^2 + b^2)} \varphi_o + \frac{1}{2aD(a^2 + b^2)} Q_o; \\ C_4 &= -\frac{a^2 - b^2 + T^*}{2ab} w_o - \frac{1}{2Dab} M_o. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Переходим к определению фундаментальных функций задачи.

$$w(x) = A_{11}w_o + A_{12}\varphi_o + A_{13}M_o + A_{14}Q_o; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} w = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4 &= -\frac{a^2 - 3b^2 + T^*}{2b(a^2 + b^2)} \Phi_1\varphi_o - \frac{1}{2bD(a^2 + b^2)} \Phi_1Q_o + \\ &+ \Phi_2w_o + \frac{3a^2 - b^2 + T^*}{2a(a^2 + b^2)} \Phi_3\varphi_o + \frac{1}{2aD(a^2 + b^2)} \Phi_3Q_o - \frac{a^2 - b^2 + T^*}{2ab} \Phi_4w_o - \frac{1}{2Dab} \Phi_4M_o. \end{aligned} \quad (15)$$

Сопоставляя (14) и (15), получим:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \Phi_2 - \frac{a^2 - b^2 + T^*}{2ab} \Phi_4; \\ A_{12} &= \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{3a^2 - b^2 + T^*}{a} \Phi_3 - \frac{a^2 - 3b^2 + T^*}{b} \Phi_1 \right); \\ A_{13} &= -\frac{1}{2ab} \Phi_4; \\ A_{14} &= \frac{b\Phi_3 - a\Phi_1}{2ab(a^2 + b^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Угол поворота:

$$\varphi(x) = w'(x) = A_{21}w_o + A_{22}\varphi_o + A_{23}M_o + A_{24}Q_o; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = C_1\Phi_1' + C_2\Phi_2' + C_3\Phi_3' + C_4\Phi_4' &= C_1(a\Phi_4 + b\Phi_2) + C_2(a\Phi_3 - b\Phi_1) + C_3(a\Phi_2 - b\Phi_4) + \\ &+ C_4(a\Phi_1 + b\Phi_3) = -\frac{a^2 - 3b^2 + T^*}{2b(a^2 + b^2)} \varphi_o(a\Phi_4 + b\Phi_2) - \frac{a\Phi_4 + b\Phi_2}{2bD(a^2 + b^2)} Q_o + w_o(a\Phi_3 - b\Phi_1) + \\ &+ \frac{3a^2 - b^2 + T^*}{2a(a^2 + b^2)} (a\Phi_2 - b\Phi_4)\varphi_o + \frac{a\Phi_2 - b\Phi_4}{2aD(a^2 + b^2)} Q_o - \\ &- \frac{a^2 - b^2 + T^*}{2ab} (a\Phi_1 + b\Phi_3)w_o - \frac{(a\Phi_1 + b\Phi_3)}{2Dab} M_o. \end{aligned} \quad (18)$$

Сравнивая (17) и (18), находим

$$\begin{aligned} A_{21} &= \frac{a^2 + b^2 - T^*}{2a} \Phi_3 - \frac{a^2 + b^2 + T^*}{2b} \Phi_1; \\ A_{22} &= \Phi_2 - \frac{a^2 - b^2 + T^*}{2ab} \Phi_4; \\ A_{23} &= -\frac{a\Phi_1 + b\Phi_3}{2ab}; \\ A_{24} &= \frac{\Phi_4}{2ab}. \end{aligned}$$

Запишем выражение для изгибающего момента:

$$M(x) = w'' + T^*w = A_{31}w_o + A_{32}\varphi_o + A_{33}M_o + A_{34}Q_o. \quad (19)$$

Подставляя значения функции прогибов и ее второй производной с учетом (11) получим

$$M = \left[ -\frac{a^2 - 3b^2 + T^*}{2b(a^2 + b^2)} \varphi_0 - \frac{1}{2bD(a^2 + b^2)} Q_0 \right] \left[ (a^2 - 3b^2 + T^*) \Phi_1 + 2ab\Phi_3 \right] +$$

$$+ \left[ (a^2 - b^2 + T^*) \Phi_2 - 2ab\Phi_4 \right] w_0 + \left[ \frac{3a^2 - b^2 + T^*}{2a(a^2 + b^2)} \varphi_0 + \frac{1}{2aD(a^2 + b^2)} Q_0 \right] \left[ (a^2 - b^2 + T^*) \Phi_3 - 2ab\Phi_1 \right] -$$

$$- \left( \frac{a^2 - b^2 + T^*}{2ab} w_0 + \frac{1}{2abD} M_0 \right) \left[ (a^2 - b^2 + T^*) \Phi_4 + 2ab\Phi_2 \right]$$

Соответствующие фундаментальные функции:

$$A_{31} = -\frac{4a^2b^2 + (a^2 + b^2 + T^*)^2}{2ab} \Phi_4;$$

$$A_{32} = \frac{(a^2 + b^2)^2 + T^*(2a^2 - 2b^2 + T^*)}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{\Phi_1}{b} + \frac{\Phi_3}{a} \right);$$

$$A_{33} = \Phi_2 + \frac{a^2 - b^2 + T^*}{2ab} \Phi_4;$$

$$A_{34} = -\frac{1}{2ab(a^2 + b^2)} \left[ a(a^2 + b^2 + T^*) \Phi_1 + b(a^2 + b^2 - T^*) \Phi_3 \right]$$

Поперечная сила через фундаментальные функции выражается в виде

$$Q(x) = w''' + T^* w' = A_{41} w_0 + A_{42} \varphi_0 + A_{43} M_0 + A_{44} Q_0.$$

С другой стороны

$$Q = \left[ -\frac{a^2 - 3b^2 + T^*}{2b(a^2 + b^2)} \varphi_0 - \frac{1}{2bD(a^2 + b^2)} Q_0 \right] \left[ a(a^2 - 3b^2 + T^*) \Phi_4 + b(3a^2 - b^2 + T^*) \Phi_2 \right] +$$

$$+ \left[ a(a^2 - 3b^2 + T^*) \Phi_3 - b(3a^2 - b^2 + T^*) \Phi_1 \right] w_0 + \left[ \frac{3a^2 - b^2 + T^*}{2a(a^2 + b^2)} \varphi_0 + \frac{1}{2aD(a^2 + b^2)} Q_0 \right] \left[ a(a^2 - 3b^2 + T^*) \Phi_2 - \right.$$

$$\left. - b(3a^2 - b^2 + T^*) \Phi_4 \right] + \left( \frac{a^2 - b^2 + T^*}{2ab} w_0 + \frac{1}{2abD} M_0 \right) \left[ a(a^2 - 3b^2 + T^*) \Phi_1 + b(3a^2 - b^2 + T^*) \Phi_3 \right].$$

Тогда последние четыре фундаментальные функции для этого варианта корней имеют вид

$$A_{41} = -\frac{(a^2 + b^2)^2 + T^*(2a^2 - 2b^2 + T^*)}{2} \left( \frac{\Phi_1}{b} + \frac{\Phi_3}{a} \right);$$

$$A_{42} = -\frac{(a^2 + b^2)^2 + T^*(2a^2 - 2b^2 + T^*)}{2ab} \Phi_4;$$

$$A_{43} = -\frac{a^2 - 3b^2 + T^*}{2b} \Phi_1 - \frac{3a^2 - b^2 + T^*}{2a} \Phi_3;$$

$$A_{44} = -\Phi_2 - \frac{a^2 - b^2 + T^*}{2ab} \Phi_4.$$

Фундаментальные функции для остальных трех вариантов корней характеристического уравнения получаются аналогичным образом (аналитические выражения этих функций здесь не приводятся вследствие ограниченного объема статьи).

**Выводы.** Таким образом, получены выражения всех фундаментальных функций задачи, которые используются для решения краевых задач изгиба длинных

цилиндрических оболочек при разных граничных условиях в соответствии с алгоритмом ЧА МГЭ [3].

Список используемой литературы

1. Алексеев Е.Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е.Р.Алексеев, О.В. Чеснокова, Е.А. Рудченко. — М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 269 с.
2. Дашенко А.Ф. MATLAB в механике деформируемого твердого тела. Алгоритмы и программы. Учебное пособие / А.Ф. Дашенко, В.Ф. Оробей, Н.Г.Сурьянинов. — Харьков: Бурун книга, 2011. — 480 с.
3. Дашенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф.Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — Одесса, ВМВ, 2010. — В 2-х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
4. Фаронов В.В. Delphi 5. Учебный курс / В.В. Фаронов. — М.: Нолидж, 2001. — 608 с.

Рекомендовано до публікації д.т.н., проф., Б.Ф. Піпа

Стаття надійшла до редакції 28.10.2013

## **ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РІШЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ЗАВДАННЯ ВИГИНУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ**

СУР'ЯНІНОВ М.Г., КОРНІЄНКО Ю.В.

*Одеський національний політехнічний університет*

Отримана повна система фундаментальних рішень задачі про вигин замкнутої кругової циліндричної оболонки під дією осесиметричного навантаження. Задача вирішена з використанням нового підходу — чисельно-аналітичного методу граничних елементів. Відзначено високу ефективність методу, коротко викладена його суть.

**Ключові слова:** *циліндрична оболонка, метод граничних елементів, осесиметричний вигин, фундаментальна функція.*

## **FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE AXISYMMETRIC PROBLEM OF BENDING CYLINDRICAL SHELL**

SURYANINOV N.G., KORNIENKO U.V.

*Odessa National Polytechnic University*

There's a fundamental solution complete system of bending closed circular cylindrical under the action of axially symmetric load. The problem is solved using a new approach — a numerical-analytical boundary element method. The high efficiency of the method is summarized its essence.

**Keywords:** *cylindrical shell, the boundary element method, axisymmetric bending fundamental function.*