

УДК 621.315.2.016.2

**ЛОБОДЗИНСЬКИЙ В. Ю., ЧИБЕЛІС В. І.**

*Національний технічний університет України*

*«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРИФАЗНОЇ ЛІНІЇ З  
РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ  
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСАХ**

**Мета.** Розроблення математичної моделі трифазної лінії з розподіленими параметрами при електромагнітних перехідних процесах, які виникають при різних комутаціях для розрахунку перехідних режимів на стадії проектування.

**Методика.** В основу роботи покладені диференційні рівняння стану кола, граничні та початкові умови для забезпечення рішення практичних задач.

**Результати.** Розроблена математична модель для розрахунку електромагнітних перехідних процесів у трифазних лініях, яка включає систему диференційних рівнянь у часткових похідних, граничні та початкові умови, для дослідження широкого класу практичних завдань, пов'язаних з розрахунком перехідних процесів у трифазних лініях.

**Наукова новизна.** Побудована математична модель трифазного кола з розподіленими параметрами, яка придатна для розрахунку перехідних електромагнітних процесів, які враховують можливі варіанти комутацій, як робочого так і аварійного характеру.

**Практична значимість.** Отримано операторні зображення струмів та напруг з урахуванням початкових умов для вирішення практичних задач пов'язаних з розрахунком перехідних процесів в трифазних лініях.

**Ключові слова:** *перехідні процеси, операторний метод, математична модель, розподіленні параметри.*

**Вступ.** Для дослідження електромагнітних перехідних процесів в трифазних кабельних лініях надається першочергове значення з точки зору їх аналізу, розробки, проектування та експлуатації при функціонуванні в нормальних та аварійних режимах роботи [1-5].

Надійність роботи кабельних ліній електропередачі визначається високими технічними характеристиками, на основі яких виконана лінія, а також умовами її експлуатації. Актуальність розрахунку електромагнітних перехідних процесів пов'язано з вибором конструктивного виконання лінії та засобів захисту в аварійних режимах роботи від перенапруг та струмів короткого замикання. Тому потрібно розробляти та удосконалювати методики чисельного розрахунку перехідних процесів у трифазних лініях з розподіленими параметрами та складними початковими умовами пр. різних комутаціях [6-9].

Для дослідження електромагнітних перехідних процесів використовуються схеми заміщення елемента  $dx$  лінії з розподіленими параметрами (рис. 1). При цьому модель кабельної лінії стає аналогічною відомим математичним моделям довгих ліній [10].

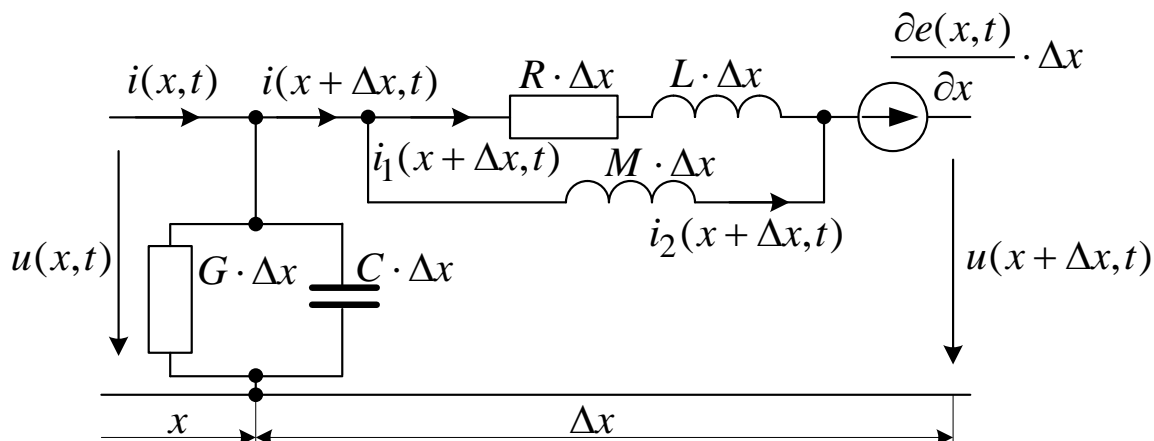


Рис. 1. Узагальнена схема заміщення однієї фази трифазної лінії

Так як в конструкції кабелю передбачено наявність додаткового екрану для вирівнювання електричного поля, то при описі процесів в схемі заміщення з розподіленими параметрами для однофазного кабелю слід враховувати взаємодію  $M$ , яка визначається електромагнітним полем в ізоляції між жилою та екраном.

Фізичний сенс елементів схеми заміщення (рис.1) полягає в наступному:  $L$  (Гн/м) – середнє значення ефективної індуктивності кабелю з урахуванням взаємної індукції між елементами кабелю, на одиницю довжини;  $R$  (Ом/м) – активний опір на одиницю довжини, еквівалентний поздовжнім первинним параметрам лінії;  $C$  (Ф/м) – середнє значення ємності щодо провідників і землі, на одиницю довжини;  $G$  (См/м) – провідність на одиницю довжини лінії, еквівалентна діелектричним втратам в ізоляції;  $M$  (Гн/м) – середнє значення поздовжньої взаємної індуктивності між жилою та екраном.

**Постановка завдання.** Побудова математичної моделі трифазної лінії з розподіленими параметрами, для отримання операторних зображень наруг та струмів, які дозволяють досліджувати електромагнітні перехідні процеси у трифазних лініях електропередачі на стадії проектування по конструктивних даних кола з урахуванням його параметрів.

**Результати дослідження.** Побудуємо математичну модель електромагнітних перехідних процесів у трифазних лініях з розподіленими параметрами, яка складається із системи диференційних рівнянь стану кола, граничних та початкових умов. При математичному описанні поставлених задач виникають зміщанні крайові задачі. Для отримання перехідних зображень наруг та струмів використовується операторний метод. Для вирішення поставлених задач скористаємось низькою припущень: диференційні рівняння лінійні та після комутаційні граничні умови виникають миттєво.

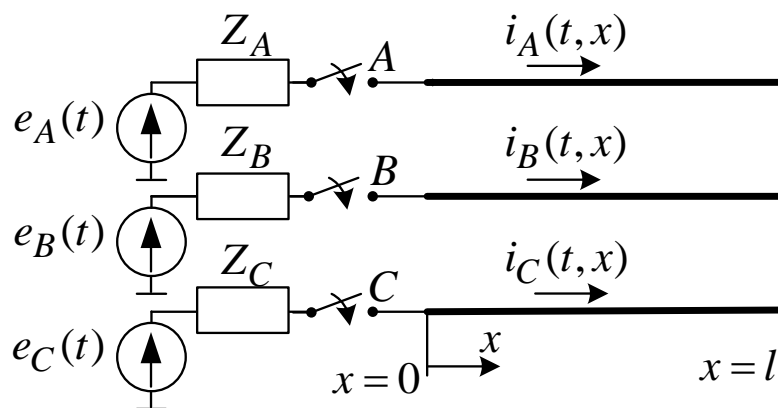


Рис.2. Система координат струмів у трифазній лінії

Розглянемо після комутаційний стан трифазної лінії (рис. 2). Запишемо граничні умови в операторній формі (по Лапласу):

Підключення лінії до навантаження з урахуванням рівності потенціалів у вузлах  $A, B, C$

$$U_A(l, p) = U_B(l, p) = U_C(l, p)$$

для струмів

$$I_A(l, p) + I_B(l, p) + I_C(l, p) = 0$$

Крім того, для вузлів записується потенціал щодо землі через ЕРС генератора і падіння напруги в опорі  $Z_A(p) = Z_B(p) = Z_C(p) = Z(p)$

$$U_A(0, p) = I_A(0, p) \cdot Z(p) + E_A(p)$$

$$U_B(0, p) = I_B(0, p) \cdot Z(p) + E_B(p)$$

$$U_C(0, p) = I_C(0, p) \cdot Z(p) + E_C(p)$$

де  $Z(p)$  – опір навантаження генератора.

Початкові умови, необхідні при розрахунку перехідних процесів, знайдемо, розглянувши стаціонарний режим до комутації. Загальні рівняння, які записані на підставі законів Кірхгофа для схеми заміщення (рис.1) приводяться до однорідного виду відносно змінних  $u(x, t)$  та  $i(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= R \cdot i(x, t) + L \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - R \cdot M \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} - L \cdot M \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} &= G \cdot u(x, t) + C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

Стаціонарне рішення рівнянь (1), справедливі для кожної фази. Для фази  $A$ , знайдемо у вигляді:

$$u_A(x,t) = a_1(x) \sin(\omega t) + a_2(x) \cos(\omega t), \quad i_A(x,t) = \alpha_1(x) \sin(\omega t) + \alpha_2(x) \cos(\omega t) \quad (2)$$

Далі підставляємо (2) в (1), що приводить до однорідної системи рівнянь (для фази  $A$ ):

$$\begin{aligned} (1-LM\omega^2)a_1' & -RM\omega a_2' & -R\alpha_1 & +\omega L\alpha_2 & = 0 \\ RM\omega a_1' & +(1-LM\omega^2)a_2' & -\omega L\alpha_1 & -R\alpha_2 & = 0 \\ -Ga_1 & +\omega Ca_2 & +\alpha_1 & & = 0 \\ -\omega Ca_1 & -Ga_2 & & +\alpha_2 & = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Для існування нетривіального рішення необхідно визначник системи прирівняти до нуля, з якого характеристичні знаходимо корені  $p_1 = -p_3, p_2 = -p_4$ .

Рішення системи (3) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} a_1 & = X_{11} \operatorname{ch} p_1 x + X_{12} \operatorname{sh} p_1 x + X_{13} \operatorname{ch} p_2 x + X_{14} \operatorname{sh} p_2 x \\ a_2 & = X_{21} \operatorname{ch} p_1 x + X_{22} \operatorname{sh} p_1 x + X_{23} \operatorname{ch} p_2 x + X_{24} \operatorname{sh} p_2 x \\ \alpha_1 & = X_{31} \operatorname{ch} p_1 x + X_{32} \operatorname{sh} p_1 x + X_{33} \operatorname{ch} p_2 x + X_{34} \operatorname{sh} p_2 x \\ \alpha_2 & = X_{41} \operatorname{ch} p_1 x + X_{42} \operatorname{sh} p_1 x + X_{43} \operatorname{ch} p_2 x + X_{44} \operatorname{sh} p_2 x \end{aligned} \quad (4)$$

Із системи (3) відкидаємо перше рівняння (так як визначник  $\Delta_p=0$ ), інші рівняння пов'язують дванадцять із шістнадцяти коефіцієнтів  $X_{ij}$  у рішенні (4). Підставивши (4) у друге, третє та четверте рівняння системи (3) та прирівнюємо до нуля коефіцієнти  $\operatorname{ch} p_1 x, \operatorname{sh} p_1 x, \operatorname{ch} p_2 x, \operatorname{sh} p_2 x$ . В загальному рішенні для однієї фази залишається чотири вільних невідомих, а у всіх трьох фазах – дванадцять. Для замикання системи рівнянь слід використовувати шість граничних умов, кожне з яких розщеплюється на два – по  $\sin \omega t$  та  $\cos \omega t$  аналогічно тому, як це було зроблено при отриманні системи (3). Отримуємо рівняння, які пов'язують невідомі числа  $X_{ij}$  для фази  $A$ , при  $j=1..4$ :

$$\begin{aligned} RM\omega p_{1,2} X_{1j} + (1-LM\omega^2) p_{1,2} X_{2j} - \omega L X_{3j} - R X_{4j} & = 0 \\ -G X_{1j} - \omega C X_{2j} + p_{1,2} X_{3j} & = 0 \\ -\omega C X_{1j} - G X_{2j} + p_{1,2} X_{4j} & = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Всі три групи рівнянь (5) об'єднуються в одну систему з дванадцяти рівнянь, яку отримаємо із граничних умов для стаціонарного докмутаційного режиму.

При відомих хвильових параметрах  $R, L, G, C, M$  фази і з урахуванням знайдених характеристичних коренів  $p_1 = -p_3, p_2 = -p_4$ , зі спільного рішення системи рівнянь  $48 \times 48$  визначаються всі числа  $X_{ij}$ . Ця система рівнянь будується з чотирьох підсистем:

- трьох універсальних (5), однакових для всіх видів комутації;
- одного індивідуального для кожної схеми комутації.

Після визначення чисел  $X_{ij}$ . Можна записати остаточний вигляд стаціонарних функцій напруги та струму. Для активного трифазного кола (фаза  $A$ ):

$$\begin{aligned}u_A(x,t) &= [X_{11}\text{ch}p_1x + X_{12}\text{sh}p_1x + X_{13}\text{ch}p_2x + X_{14}\text{ch}p_2x]\sin \omega t + \\ &+ [X_{21}\text{ch}p_1x + X_{22}\text{sh}p_1x + X_{23}\text{ch}p_2x + X_{24}\text{ch}p_2x]\cos \omega t, \\ i_A(x,t) &= [X_{31}\text{ch}p_1x + X_{32}\text{sh}p_1x + X_{33}\text{ch}p_2x + X_{34}\text{ch}p_2x]\sin \omega t + \\ &+ [X_{41}\text{ch}p_1x + X_{42}\text{sh}p_1x + X_{43}\text{ch}p_2x + X_{44}\text{ch}p_2x]\cos \omega t + \\ &+ I_1 \sin \omega t + I_2 \cos \omega t,\end{aligned}$$

**Висновок.** Розроблена математична модель електромагнітних перехідних процесів у трифазних лініях з розподіленими параметрами, яка включає в себе систему диференціальних рівнянь у часткових похідних, граничні та початкові умови, яка придатна для дослідження широкого класу практичних задач, які пов'язані з розрахунком перехідних процесів у трифазних повітряних та кабельних лініях.

#### Література

1. Волновые явления в неоднородных линиях: В 5 т. Том 4. Параметрические цепи / В. К. Римский, В. П. Берзан, В. И. Пацюк, Н. Ф. Карчева, И. В. Андрос; Типография Академии наук Молдовы. – Кишинев, 2008. – 560 с.
2. Кадомская К. П. Перенапряжения в электрических сетях различного назначения и защита от них: учебник / К. П. Кадомская, Ю. А. Лавров, А.А. Рейхердт; Изд-во НГТУ. – Новосибирск, 2004. – 320 с.
3. Костенко М. В. Перенапряжения и защита от них в воздушных и кабельных электропередачах высокого напряжения / М. В. Костенко, К. П. Кадомская, М. Л. Левинштейн, И. А. Ефремов. – Л.: Наука, 1988. – 302 с.
4. Левинштейн М. Л. Операционное исчисление в задачах электротехники / М.Л. Левинштейн – 2-е изд.– Л.: Энергия, 1972. – 360 с.
5. Chibelis V. Research of transposition efficiency of screens of three-phase cable lines, taking into account the mutual disposition of phase / Chibelis V., Lobodzinskiy V., Illina O. // Computational problems of electrical engineering. – Lviv. Vol. 6, No.2, 2016. – pp. 63-66.
6. Lobodzinskiy V. The Investigation of Wave Process During Propagation of Plate Voltage Pulse on Three-Phase Performance Cable Line. / Lobodzinskiy V., Tsyban Y. // IEEE Electrical and computer engineering (UKRCON) –2017. – pp. 448-452.
7. Лободзинський В. Ю. Дослідження форм кривих перехідного процесу при комутаціях

#### References

1. Rimskiy, V. K., Berzan, V. P., Patsyuk, V. I., Karcheva, N. F. & Andros, I. V. (2008). *Volnovye yavleniya v neodnorodnykh liniyakh. Parametricheskie tsepi* [Wave phenomena in inhomogeneous lines. Parametric circuits]. Tipografiya Akademii nauk Moldovy. (Vols. 1-5; Vol. 4). Kishinev. [in Russian].
2. Kadomskaya, K. P., Lavrov, Yu. A. & Reykherdt, A. A. (2004) *Perenapryazheniya v elektricheskikh setyakh razlichnogo naznacheniya i zashchita ot nikh* [Overvoltages in electrical networks for various purposes and protection from them]. Novosibirsk: Izd-vo NGTU [in Russian].
3. Kostenko, M. V., Kadomskaya, K. P., Levinshteyn, M. L. & Efremov, I. A. (1988) *Perenapryazheniya i zashchita ot nikh v vozdushnykh i kabel'nykh elektroperedachakh visokogo napryazheniya* [Overvoltages and protection from them in overhead and cable transmissions of high voltage]. Lviv: Nauka [in Russian].
4. Levinshteyn, M. L. (1972) *Operatsionnoe ischislenie v zadachakh elektrotehniki* [Operational calculus in electrical engineering problems]. (2d ed.). Lviv: Energiya [in Russian].
5. Chibelis V. Research of transposition efficiency of screens of three-phase cable lines, taking into account the mutual disposition of phase / Chibelis V., Lobodzinskiy V., Illina O. // Computational problems of electrical engineering. – Lviv. Vol. 6, No.2, 2016. – pp. 63-66.
6. Lobodzinskiy V. The Investigation of Wave Process During Propagation of Plate Voltage Pulse on Three-Phase Performance Cable Line. / Lobodzinskiy V., Tsyban Y. // IEEE Electrical and computer engineering (UKRCON) –2017. – pp. 448-452.
7. Lobodzynskiy, V. Yu. (2017). *Doslidzhennia form kryvykh perekhidnoho protsesu pry komutatsiyakh*

[Текст] / В. Ю. Лободзинський // Праці інституту електродинаміки НАН України. – 2017. – №47. – С.11-15.  
8. Лободзинський В. Ю. Аналіз перенапруг та струмів однорідної довгої лінії при несиметричних коротких замиканнях [Текст] / В. Ю. Лободзинський // Вісник Київського національного університету технологій та дизайну. Серія Технічні науки. – 2017. - № 2 (108). - С. 38-44.  
9. Lobodzinskiy V. Mathematical modeling of the three-phase high-voltage cable lines under the theory of multiterminal networks / V. Lobodzinskiy, L. Maslak // IEEE Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE) – 2015. – pp. 96-98.  
10. Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники: В 3-х т. Т.3. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин; СПб.: Питер. – Санкт-Петербург, 2003. — 377 с.

[Investigation of the forms of the curves of the transient process during commutation]. *Pratsi instytutu elektrodynamiky NAN Ukrainy, 47, 11-15* [in Ukraine].  
8. Lobodzynskiy V. Yu. (2017) *Analiz perenapruh ta strumiv odnorodnoi dovroi linii pry nesymetrychnykh korotkykh zamykanniakh* [Analysis of overvoltages and currents of a homogeneous long line with asymmetrical short circuits]. *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu tekhnolohii ta dyzainu. Serii Tekhnichni nauky, 2(108), 38-44* [in Ukraine].  
9. Lobodzinskiy V. Mathematical modeling of the three-phase high-voltage cable lines under the theory of multiterminal networks / V. Lobodzinskiy, L. Maslak // IEEE Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE) – 2015. – pp. 96-98.  
10. Demirchyan, K. S., Neyman, L. R., Korovkin, N. V. & Chechurin, V. L. (2003) *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki* [Theoretical Foundations of Electrical Engineering]. SPb.: Piter. (Vols. 1-3; Vol. 3). St. Petersburg [in Russian].

**LOBODZINSKIY VADIM**

*vadim\_lv@bigmir.net*

ORCID: 0000-0003-1167-824X

Researcher ID: 57188750413

Department of Theoretical Grounds of Electrical Engineering

National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Politechnic Institute»

**CHYBELIS VALERY**

*toe209@gmail.com*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2235-9826>

Researcher ID: 57195586866

Department of Theoretical Grounds of Electrical Engineering

National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Politechnic Institute»

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХФАЗНОЙ ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ ЛОБОДЗИНСКИЙ В. Ю., ЧИБЕЛИС В. И.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сикорського»

**Цель.** Разработка математической модели трехфазной линии с распределенными параметрами при электромагнитных переходных процессах, возникающих при различных коммутациях для расчета переходных режимов на стадии проектирования.

**Методика.** В основу работы положены дифференциальные уравнения состояния цепи, предельные и начальные условия для обеспечения решения практических задач.

**Результаты.** Разработана математическая модель для расчета электромагнитных переходных процессов в трехфазных линиях, которая включает систему дифференциальных уравнений в частных производных, предельные и начальные условия, для исследования широкого класса практических задач, связанных с расчетом переходных процессов в трехфазных линиях.

**Научная новизна.** Построена математическая модель трехфазного цепи с распределенными параметрами, которая пригодна для расчета переходных электромагнитных процессов, которые учитывают возможные варианты коммутаций, как рабочего, так и аварийного характера.

**Практическая значимость.** Получено операторные изображения токов и напряжений с учетом начальных условий для решения практических задач связанных с расчетом переходных процессов в трехфазных линиях.

**Ключевые слова:** переходные процессы, операторный метод, математическая модель, распределенные параметры.

## MATHEMATICAL MODEL OF THREE-PHASE LINE WITH DISTRIBUTED PARAMETERS AT ELECTROMAGNETIC TRANSITION PROCESSES

**LOBODZINSKIY V.U., CHIBELIS V. I.**

*National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic institute»*

**Purpose.** Development of a mathematical model of a three-phase line with distributed parameters at electromagnetic transients, which arise at different commutations for the calculation of transition modes at the design stage.

**Methodology.** The work is based on differential equations of chain state, limiting and initial conditions for ensuring the solution of practical problems.

**Findings.** A mathematical model has been developed for the calculation of electromagnetic transients in three-phase lines, which includes a system of partial differential equations, limit and initial conditions, for the study of a wide class of practical problems related to the calculation of transients in three-phase lines.

**Originality.** A mathematical model of a three-phase circuit with distributed parameters has been built, which is suitable for the calculation of transient electromagnetic processes, which take into account possible switching options, both working and emergency ones.

**Practical value.** Operator images of currents and voltages were obtained taking into account the initial conditions for solving practical problems associated with the calculation of transients in three-phase lines.

**Key words:** transients, operator method, mathematical model, distributed parameters.