УДК 677.017

В.Ю. КАЛАШНИК В.Ю. ЩЕРБАНЬ
Киевский национальный университет технологий и дизайна

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ НИТИ ПО НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ МАЛОЙ КРИВИЗНЫ С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ ТРЕНИЯ

Получены теоретические зависимости, что позволяют получить уравнение для определения натяжения и формы оси нити в зоне формирования ткани и трикотажа для уменьшения процента обрывов нитей и улучшения качества готовой продукции.

Ключевые слова: нить, натяжение, анизотропия.

Received theoretical dependence that can get the equation for determining the tension axis and form threads in the formation zone fabrics and knitwear to reduce the percentage of thread breakages and improve product quality.

Keywords: yarn tension anisotropy.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными и практическими заданиями: на основе численного интегрирования системы дифференциальных уравнений и аппроксимации полученных данных получить выражения для определения формы оси и натяжения нити при поперечном скольжении по цилиндрической направляющей малой кривизны с учетом анизотропии трения.

Анализ последних исследований

В работах [1, 2] приводятся теоретические и экспериментальные исследования по изучению продольного скольжения нитей по направляющим большой и малой кривизны. Данные результаты не позволяют получить уравнения для определения натяжения и формы оси нити в зоне формирования ткани и трикотажа, а это, в свою очередь, не позволяет уменьшить процент обрывов нитей и улучшить качество готовой продукции [2].

Нерешенные ранее частей общей проблемы

Проведенные ранее исследования не позволяют определять форму и натяжение нитей при их поперечном скольжении по направляющим большой и малой кривизны с учетом анизотропии трения.

Цель данного исследования

Заключается в получении системы дифференциальных уравнений, интегрирование которой позволит получить выражения для определения формы оси и натяжения нити при поперечном скольжении по направляющей цилиндрической формы малой кривизны с учетом анизотропии трения.

Результаты и их обсуждение

Данный вид взаимодействия нити с направляющей поверхностью встречается во многих технологических процессах текстильной и трикотажной промышленности. Здесь подразумевается, что радиус кривизны направляющей поверхности значительно превышает значение расчетного радиуса поперечного сечения нити.

В качестве допущения будем считать, что направляющая поверхность представляет собой цилиндрическую поверхность. Также будем считать, что силами тяжести элемента нити можно пренебречь (натяжение нити, силы трения превышают силу тяжести элемента нити на один-два порядка). На рис. 1 представлена расчетная схема.

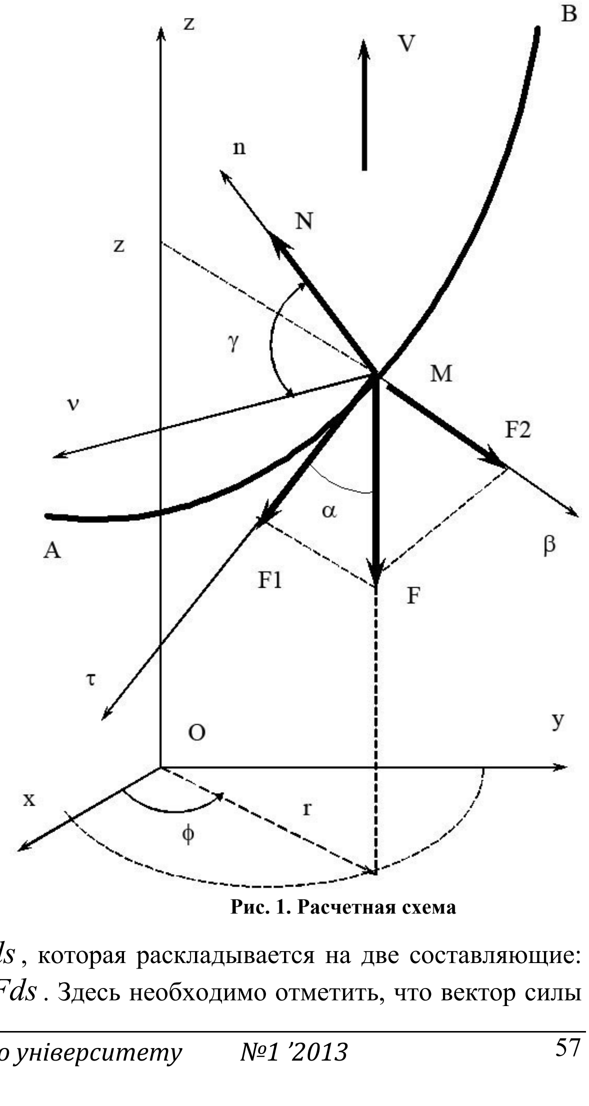

Рис. 1. Расчетная схема

Цель данного исследования – определить натяжение и форму оси нити как функций дуговой координаты s. Выделяем на участке нити AB бесконечно малый элемент ds с точкой M в центре его тяжести.

При поперечном скольжении по цилиндрической поверхности на него будет действовать полная реакция, отнесенная к единице длины (в дальнейшем для простоты просто сила или реакция) Rds, которая раскладывается на две составляющие: нормальную реакцию поверхности Nds и силу трения Fds. Здесь необходимо отметить, что вектор силы трения всегда будет направлен противоположно вектору скорости.

Сила трения и единичный орт касательной τ располагаются в соприкасающейся плоскости. Натуральный трехгранник располагается таким образом, чтобы и единичный орт бинормали также располагался в соприкасающейся плоскости. Угол между нормалью натурального трехгранника и нормалью n к поверхности в точке M (угол геодезического отклонения) обозначим γ.

Наиболее удобной системой координат, в данном случае, будет цилиндрическая координатная система. В качестве координат используются $r, \quad \varphi, \quad z$. Сила трения, расположенная в соприкасающейся плоскости, определяется из следующей системы уравнений

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad , \quad F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \tag{1}$$

где $F_1 = k_1 N$ – проекция силы трения F на касательную ось натурального трехгранника;

$F_2 = k_2 N$ – проекция силы трения F на бинормальную ось натурального трехгранника;

k_1, k_2 – коэффициенты трения нити в продольном и поперечном направлении, которые и характеризуют анизотропию фрикционных свойств.

Тогда величину силы трения, с учетом (1), можно определить по следующей формуле

$$F = N\sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \tag{2}$$

Основная система дифференциальных уравнений в цилиндрических координатах, описывающая поперечное скольжение нити по направляющей с учетом анизотропии фрикционных свойств, будет иметь вид

$$\begin{gathered}
\frac{d}{ds}\left(P\frac{dr}{ds}\right) - Pr\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + N = 0,\\
\frac{d}{ds}\left(Pr\frac{d\varphi}{ds}\right) = 0,\\
\frac{d}{ds}\left(P\frac{dz}{ds}\right) - \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\,N = 0,\\
\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,
\end{gathered} \tag{3}$$

где s – дуговая координата, м;

P – натяжение нити, Н;

r – радиус поперечного сечения направляющей поверхности, м;

φ – цилиндрическая координата, которая определяет угол поворота радиуса r по отношению к положительному направлению оси x (рис. 1), рад;

N – нормальная реакция поверхности, Н;

z – цилиндрическая координата, ось которой параллельна вектору скорости, м.

Учитывая, что в качестве направляющей поверхности был выбран цилиндр ($r = const$), система дифференциальных уравнений (3) примет вид

$$\begin{gathered}
-Pr\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + N = 0,\\
\frac{d}{ds}\left(Pr\frac{d\varphi}{ds}\right) = 0,\\
\frac{d}{ds}\left(P\frac{dz}{ds}\right) - \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\,N = 0,\\
r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.
\end{gathered} \tag{4}$$

Из второго уравнения системы (4) получим

$$P\frac{d\varphi}{ds} = C_1 = const. \tag{5}$$

Из уравнения (5) определим значение производной

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{C_1}{P}. \tag{6}$$

Из первого уравнения системы (4) определяем значение нормальной реакции

$$N = Pr(\frac{d\varphi}{ds})^2. \tag{7}$$

Подставляем выражение (7) в третье дифференциальное уравнение системы (4)

$$\frac{d}{ds}(P\frac{dz}{ds}) - \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\, Pr(\frac{d\varphi}{ds})^2 = 0, \tag{8}$$

Преобразуем уравнение (8) к виду

$$\frac{dP}{ds}\frac{dz}{ds} + P\frac{d^2 z}{ds^2} - \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\, Pr(\frac{d\varphi}{ds})^2 = 0. \tag{9}$$

Из четвертого дифференциального уравнения системы (4) определим

$$(\frac{dz}{ds})^2 = 1 - r^2(\frac{d\varphi}{ds})^2. \tag{10}$$

Из выражения (10) определяем значение первой производной цилиндрической координаты z по дуговой координате

$$\frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - r^2(\frac{d\varphi}{ds})^2}. \tag{11}$$

Продифференцируем уравнение (11) по дуговой координате s и определим значение второй производной

$$\frac{d}{ds}(\frac{dz}{ds}) = \frac{d^2 z}{ds^2} = -\frac{r^2(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\frac{d\varphi}{ds})}{\sqrt{1 - r^2(\frac{d\varphi}{ds})^2}}. \tag{12}$$

Для определения значения второй производной цилиндрической координаты φ по дуговой координате s продифференцируем выражение (6), получим

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{C_1\frac{dP}{ds}}{P^2}. \tag{13}$$

Подставляем выражение (13) в дифференциальное уравнение (12), получим

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = -\frac{r^2(-\frac{C_1\frac{dP}{ds}}{P^2}\frac{d\varphi}{ds})}{\sqrt{1 - r^2(\frac{d\varphi}{ds})^2}}. \tag{14}$$

В окончательном виде будем иметь

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{r^2 C_1^2}{P^3\sqrt{1 - r^2(\frac{d\varphi}{ds})^2}}\frac{dP}{ds}. \tag{15}$$

Подставляем выражение (15) в дифференциальное уравнение (9) и с учетом (11) получим

$$\frac{dP}{ds}\sqrt{1 - r^2(\frac{d\varphi}{ds})^2} + \frac{r^2 C_1^2}{P^2\sqrt{1 - r^2(\frac{d\varphi}{ds})^2}}\frac{dP}{ds} - \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\, Pr(\frac{d\varphi}{ds})^2 = 0. \tag{16}$$

Преобразуем дифференциальное уравнение (16) и окончательно получим

$$\frac{dP}{ds} = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\, C_1^2 rP\sqrt{1 - r^2(\frac{C_1}{P})^2}}{\{P^2[1 - r^2(\frac{C_1}{P})^2] + r^2 C_1^2\}}. \tag{17}$$

Полученное дифференциальное уравнение первого порядка позволяет получить зависимость натяжения нити от дуговой координаты с учетом анизотропии трения при поперечном скольжении. Его затруднительно проинтегрировать. Поэтому для его решения будем использовать численные методы, в частности метод Рунге-Кутта-Мерсона. Программа для реализации этого метода приведена в приложении.

Численно решая дифференциальное уравнение (17) получим массив данных, который позволяет определять значение натяжения нити в зависимости от дуговой координаты.

Вполне очевидно, что для удобства пользования полученными данными их необходимо представить в виде некоторой функции. Для этого в работе была осуществлена аппроксимация данных с использованием специального программного обеспечения, описание которого приведено в третьем разделе. Аппроксимация осуществлялась с использованием степенного полинома. Данная программа позволяет осуществлять аппроксимацию или с заданной точностью (степень полинома определяется автоматически) или пользователь сам задает степень полинома.

В результате получим некоторую новую функцию

$$P = V(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n, \tag{18}$$

где $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ – коэффициенты степенного полинома.

Перейдем к определению зависимостей $\varphi(s)$ и $z(s)$

$$\frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - r^2 \left(\frac{C_1}{P}\right)^2}.$$

Подставляем в последнее выражение (18)

$$\frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - r^2 \left(\frac{C_1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}\right)^2}. \tag{19}$$

Зависимость цилиндрической координаты φ от дуговой координаты s определим из выражения

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{C_1}{P} = \frac{C_1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}. \tag{20}$$

Системы трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dP}{ds} = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\, C_1^2 r P \sqrt{1 - r^2 \left(\frac{C_1}{P}\right)^2}}{\left\{ P^2 \left[1 - r^2 \left(\frac{C_1}{P}\right)^2\right] + r^2 C_1^2 \right\}},$$

$$\frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - r^2 \left(\frac{C_1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}\right)^2},$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{C_1}{P} = \frac{C_1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n},$$

позволяет получить зависимости натяжения и формы оси нити при поперечном скольжении по направляющей малой кривизны с учетом анизотропии трения.

Выводы

Таким образом, численное интегрирование системы трех дифференциальных уравнений первого порядка позволяет получить зависимости натяжения и формы оси нити при поперечном скольжении по направляющей малой кривизны с учетом анизотропии трения. Полученая теоретическая зависимость позволит уменьшить процент обрывов нитей, улучшить качество готовой продукции.

В дальнейшем планируется проведение исследований по определению формы оси и натяжения для различных видов сырья и структуры нитей (комплексные нити, мононити и пряжа).

Литература

1. Щербань В.Ю. Механика нити / Щербань В.Ю., Хомяк О.Н., Щербань Ю.Ю. – К. : КНУТД, 2002. – 196 с.

2. Программные и математические компоненты проектирующих подсистем технологических процессов, оборудования, свойств материалов легкой и текстильной промышленности / [Щербань В.Ю., Слизков А.Н., Озадовский А.Б., Щербань Ю.Ю.]. – К. : Конус-Ю, 2009. – 327 с.

Надійшла 23.1.2013 р.
Рецензент: д.т.н. Здоренко В.Г.