

УДК519.21

ТЕОРЕМА ТИПУ ЛЕВІ — БАКСТЕРА ДЛЯ ГАУССІВСЬКИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ

С.М. Краснитський, доктор фізико-математичних наук, професор
Київський національний університет технологій та дизайну
О.О. Курченко, доктор фізико-математичних наук, професор
Київський національний університет Тараса Шевченка

Ключові слова: гауссівські узагальнені процеси, процеси з незалежними значеннями, граничні теореми типу Леві — Бакстера.

Використання узагальнених функцій [1] і їх стохастичних аналогів (узагальнених процесів і полів) суттєво розширює можливості адекватного описання систем самої різноманітної природи [1,2]. В даній роботі в якості такої функції розглядається узагальнений випадковий процес $\xi = (\xi, \varphi)$, під яким розуміємо сукупність дійсних випадкових величин $\{\xi_\varphi, \varphi \in K\}$, що індексовані дійсними фінітними нескінченно диференційованими функціями з простору K (інше поширене позначення D) Л. Шварца [1]. За означенням, розглядуваний узагальнений випадковий процес є лінійним з імовірністю 1 за аргументом φ . Скінченновимірні розподіли процесу вважаються нормальними (гауссівськими). В нашій доповіді розглядається підклас процесів вищезазначеного типу, а саме — процеси з незалежними значеннями. Для таких процесів величини $(\xi, \varphi), (\xi, \psi) \in$ незалежними, якщо носії функцій φ, ψ не мають спільних внутрішніх точок. Згідно з [1], коваріаційний функціонал $B(\varphi, \psi)$ вказаного процесу має вигляд

$$B(\varphi, \psi) = \int \sum_{j,k \geq 0} R_{jk}(x) \varphi^{(j)}(x) \psi^{(k)}(x) dx, \quad (1)$$

де $\int \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \dots, \varphi^{(j)}$ — похідна j -го порядку від функції φ , причому лише скінченна кількість (неперервних) функцій R_{jk} є відмінною від 0 на кожному скінченному інтервалі. Надалі в якості такого інтервалу без суттєвого обмеження загальності береться інтервал $[0, 1]$, а порядок диференціальної форми в (1) (величина $\max_{j,k} \{j + k\}$), дорівнює парному числу $2N$. Таким чином коваріаційний функціонал процесу припускає представлення

$$r(\varphi, \psi) = \sum_{\substack{k,j=0, \\ k+j \leq 2N}}^{2N} \int R_{kj}(x) \varphi^{(k)}(x) \psi^{(j)}(x) dx, \quad (2)$$

Відмітимо, що в роботі [4] розглядався частковий випадок (2) при $N = 1$. Ми будемо використовувати сімейства функцій виду

$$\{\chi_{t,h} \in K : t \in R = (-\infty, \infty), h \in (0,1), \text{supp } \chi_{t,h} \subset [t, t+h]\}, \quad (3)$$

Означення. Сімейство функцій (3) називається сімейством типу O_2 , якщо для функцій цього сімейства виконується рівність $\int_t^{t+h} \chi_{t,h}^2(x) dx = h + o(h), h \rightarrow +0$ рівномірно відносно $t \in R$.

Перетворення L, M . Визначимо перетворення L, M основних функцій $\chi_{t,h}$ наступними рівностями

$$\left(L\chi_{t,h} \right) (x) = \chi_{t,h}(2x - t) - \chi_{t,h}(2x - (t + h)), x \in R, \left(M\chi_{t,h} \right) (x) = \int_{-\infty}^x \chi_{t,h}(y) dy.$$

Нехай сімейство функцій (3) має тип O_2 і виконується рівність (2).

Визначимо нове сімейство функцій

$$A_N = \left\{ \alpha_{t,h} = 2^{-\frac{N(N-1)}{2}} \left((ML)^N \chi_{t,h} \right) : t \in R, h > 0 \right\}.$$

Для неспадної необмеженої послідовності натуральних чисел $\{b(n)\}$ і функції $\alpha_{t,h} \in A_N$ позначимо

$$\alpha_{k,n} = \alpha_{t,h}(\cdot) \Big|_{t=k/b(n), h=1/b(n)}, k = 0, 1, \dots, b(n) - 1, n \geq 1.$$

Має місце наступне твердження, яке можна віднести до класу граничних теорем так званого типу Леві — Бакстера. Короткі відомості про теореми даного типу наводяться в [4], детальний опис дається, наприклад, в [5].

Теорема. При виконанні представлення (2) має місце граничне співвідношення

$$S_n(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{b(n)-1} (\xi, \alpha_{k,n})^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{2N} (-1)^{N-i} \int_0^1 R_{i,2N-i}(x) dx,$$

де збіжність розуміється у середньому квадратичному. Якщо ϵ збіжним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (b(n))^{-1}$, то збіжність $S_n(\xi)$ має місце з імовірністю 1.

Список використаних джерел

1. Гельфанд И.М. Обобщённые функции, в. 4 / Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. — М.: ФМ, 1961. — 472 с.
2. Розанов Ю.А. Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. — М.: Наука, 1995. — 252 с.
3. Krasnitskiy S.M. Baxter Type Theorems for Generalized Random Gaussian Processes / Krasnitskiy S.M., Kurchenko O.O. // Theory of Stochastic Processes. — 2016. — №1. — P.45 - 52.
4. Краснитський С.М. Теорема бакстерівського типу для гауссівських узагальнених випадкових процесів з незалежними значеннями другого порядку / Краснитський С.М., Курченко О.О. // Тези доповідей II міжнародної науково-практичної конференції «Мехатронні системи: інновація та інжиніринг - 15 червня 2018 (Київ), с. 106-107.
5. Козаченко Ю.В. Теореми Леві — Бакстера для випадкових полів та їх застосування / Козаченко Ю.В., Курченко О.О., Синявська О.О. Монографія. — Ужгород, 2018 — 228 с.