Лагода О.А., доц., Однокоз Д.О., студент
Київський національний університет технологій та дизайну

НЕЕВКЛІДОВА ГЕОМЕТРІЯ ЯК ПРИКЛАД ІННОВАЦІЙНОСТІ В ГЕОМЕТРІЇ

Анотація. *На прикладі неевклідової геометрії показати важливість альтернативного мислення, розвинути критичне та нестандартне мислення у студентів, продемонструвавши важливість відкидання пієтету перед авторитетами та загальновідомими і доведеними теоріями.*

Ключові слова: *неевклідова геометрія; альтернативне мислення; критичне та нестандартне мислення; креативність.*

Lagoda O.A., Odnokoz D.O.
Kyiv National University of Technologies and Design

NON-EUCLIDEAN GEOMETRY AS AN EXAMPLE OF INNOVATION IN GEOMETRY

Abstract. *On the example of non-Euclidean geometry to show the importance of alternative thinking, to develop critical and non-standard thinking in students, demonstrating the importance of rejecting piety in front of authorities and well-known and proven theories.*

Keywords*: non-Euclidean geometry; alternative thinking; critical and non-standard thinking; creativity.*

Вступ. Сучасні реалії яскраво підкреслюють наскільки наше буденне життя залежить від науки, від передових технологій, від винаходів. Не тільки школярі, навіть діти в дитсадочках завмерли в очікуванні того, як швидко науковці впораються з викликом, який постав перед людством у зв’язку з пандемією спричиненою сумнозвісним Covid-19. Як ніколи раніше люди почали усвідомлювати, що вчені не лише проводять якісь ефемерні експерименти в абстрактних лабораторіях, старанно доводячи, що вони відпрацювали ті гранти, які перед тим вибороли в умовах жорсткої конкуренції. Насправді в їхніх руках долі мільярдів людей, і, як показує цей приклад, науці дуже важливо працювати на випередження. Уявіть скільки життів вдалося б врятувати, якби ефективна вакцина на момент початку пандемії вже була винайдена. Для цього науковцям треба було взятися за задачу, яка, по-перше, надскладна, а по-друге, не дуже начебто й актуальна. Де взяти сили, натхнення і віру в себе, щоб братися за відкриття чогось абсолютно нового, якщо не існує ні рецептів, ні гарантій винайдення, інколи навіть впевненості у потрібності немає?

Як стверджують дослідники [1–4] якості винахідника потрібно розвивати в дитинстві та юності, коли майбутній дорослий активно пізнає оточуюче середовище та себе самого. За останні три десятиліття разюче змінився і світ, і канони успіху та продуктивності. Ще не так давно фрази «знання – це сила» та «головне – це вміти вчитися» вселяли спокій і віру у світле майбутнє, однак сучасні вимоги часу і технологій показують – цього не достатньо. У 2016 році Всесвітній економічний форум визначив комплексне розв’язання проблем, критичне мислення та креативність трьома найкращими навичками для кар’єрного успіху. Таким чином відбулась легалізація й офіційне визнання креативності як важливого навику сучасної людини, незалежно від сфери зайнятості. Недарма гуру креативного мислення Майкл Мікалко [2] стверджував: креативність притаманна кожному із нас, проте не кожен розуміє, як її розвивати. Головними причинами, чому ми втрачаємо креативність – це системне заучування інформації протягом шкільних та студентських років, низька рефлексія і бажання бути як всі. Однак вихід є. Просто потрібно не побоятися вийти зі звичної зони комфорту і почати вчитися мислити творчо. Спеціаліст із творчого мислення Кріс Ґріффітс [1] сформулював простий і всім зрозумілий алгоритм прикладної креативності, яку можна застосовувати у всіх сферах життя – від формування власного бренду до розв'язання проблем у бізнесі та управлінні. К. Ґріффітс і його поради вже допомогли тисячам людей впровадити інноваційний спосіб мислення у власну бізнес-стратегію, розвинути урядові та міжнародні програми, які змінили суспільства.

Хотілося б університетські роки зробити більш ефективними, підготувати майбутнього випускника до плідної креативної роботи. Можливо саме наші студенти створять новий надкорисний мобільний додаток, нову тканину, винайдуть новий стиль в світовій моді чи рятівну вакцину. Їм, як відомим геніям – Леонардо да Вінчі, Томас Едісон, Пабло Пікассо, Генрі Форд, Альберт Ейнштейну, Стів Джобс –.вкрай потрібно буде бути готовими переступити ту межу, за якою лежить відкриття, а для цього треба буде бути послідовними у власній креативності й не боятися помилок.

Постановка завдання. На прикладі відкриття Лобачевським неевклідової геометрії, яка дотепер вражає незвичайністю, та здається хибною та неможливою, адже була відкрита у світі, що підпорядкований законам евклідової геометрії, яка панувала в свідомості людей як єдина можлива та правильна понад 2000 років, показати важливість альтернативного мислення, розвинути критичне та нестандартне мислення у студентів, продемонструвавши важливість відкидання пієтету перед авторитетами та загальновідомими і доведеними теоріями, навчити впевненості та вірі в себе на шляху до винаходу, а також моральної стійкості в періоди нерозуміння та невизнання.

Основні результати. Розвиваючись з плином часу, геометрія створювала не лише свої методи дослідження, а й розширювала предмет дослідження. Так, в епоху Відродження у зв'язку з розвитком теорії перспективи, з'явилась проективна геометрія. Розвиток проективної геометрії був обумовлений потребами нарисної геометрії в архітектурі та інженерії того часу. На початку XIX століття математичні дослідження привели до появи неевклідової геометрії М.І. Лобачевського.

Микола Іванович Лобачевський – російський математик, творець неевклідової геометрії, діяч університетської освіти та народної просвіти. Англійський математик Вільям Кліффорд назвав Лобачевського «Коперником геометрії».[5]

Великий вплив під час навчання в університеті на Лобачевського справив Мартин Федорович Бартельс – друг і вчитель великого німецького математика Карла Фрідріха Гауса. Він взяв шефство над бідним, але обдарованим студентом. На старшому курсі в характеристику Лобачевського включили «мрійливу про себе зарозумілість, наполегливість, непокору», а також «обурливі вчинки» і навіть «ознаки безбожності». Він опинився під загрозою відрахування, але заступництво Бартельса та інших викладачів допомогло відвести небезпеку.

По закінченні університету Лобачевський отримав ступінь магістра з фізики та математики з відзнакою і був залишений при університеті. У 1814 році став ад'юнктом, а через 2 роки – екстраординарним, і у 1822 році – ординарним професором. Студенти високо цінували лекції Лобачевського. Коло його обов'язків було досить широким – від читання лекцій з математики, фізики, астрономії до упорядкування бібліотеки і музею. В списку службових обов'язків було також «спостереження за благонадійністю» всіх студентів Казані.

Згодом Лобачевський обирається ректором університету. Він з головою занурюється в господарські справи – реорганізація штату, будівництво механічних майстерень, лабораторій та обсерваторії, підтримка бібліотеки й мінерологічної колекції, бере участь у виданні «Казанського вісника». Багато що він робить власними руками. Читає науково-популярні лекції з фізики для населення. Одночасно він невтомно розвиває та шліфує справу свого життя – неевклідову геометрію.

В той самий час угорець Янош Бояї також приходить до ідеї створення неевклідової геометрії. Так Всесвіт припідняв завісу і дозволив торкнутися істини двом світлим головам, але в той самий час не дозволив нікому іншому, навіть тодішньому «королю математики» Карлу Гауссу осягнути глибину відкриття. Хоча існує думка, що не міг Гаусс не зрозуміти ідей Бояї, просто не захотів з якихось причин визнати його геній.

Геометрія Лобачевського-Бояї розчистила ґрунт для створення сучасного аксіоматичного методу в геометрії, згідно якому вся геометрія повинна ґрунтуватися на основних поняттях, основних відношеннях і системі аксіом. Довести «строго» будь-яку теорему з точки зору сучасного аксіоматичного методу – це означає отримати її дедуктивним шляхом як наслідок з раніш доведених теорем, причому рисунок і всі наочні уявлення будуть виключно допоміжними. Сучасний аксіоматичний метод, створений під впливом ідей Миколи Івановича Лобачевського та Януша Бояїв геометрії, знаходить тепер широке застосування для наукового обґрунтування багатьох математичних дисциплін, включаючи і деякі розділи теоретичної механіки. Геометрія Лобачевського стала прикладом для побудови інших неевклідових геометрій: сферичної геометрії, еліптичної геометрії або геометрії Рімана, недезаргової геометрії [6].

Неевклідові геометрії відіграли визначну роль при побудові А. Ейнштейном теорії відносності, в якій необхідно було прийняти факт викривлення оточуючого нас простору.

Ще Лобачевський встановив, що його геометрія має пряме відношення до зоряної геометрії, тобто до геометрії космічного простору. На нашій планеті в рамках звичайних земних масштабів люди використовують геометрію Евкліда як найбільш просту і вірно відображаючу реальну дійсність. Справа зовсім змінюється, коли ми переходимо від земних масштабів до надто великих масштабів макросвіту або надто малих масштабів мікросвіту. Вважати, що і тут діє геометрія Евкліда, було б невірно. Досягнення фізики говорять про те, що фізичні простори надто великих масштабів ведуть себе як неевклідові [7].

Відомі вчені академіки А.С. Христианович, М.А. Лаврентьєв і С.А. Лебедєв [8] писали, що «геометрія Лобачевського була основою для винаходу, який призвів до теорії відносності і методу розрахунків процесів усередині атомного ядра. Дослідження побудови атомного ядра з неймовірною швидкістю призвели до створення атомної промисловості».

При створенні нової геометрії М.І. Лобачевський користувався відомими фактами геометрії Евкліда, які не є наслідками п'ятого постулату Евкліда, тобто всі твердження, які не залежать від змісту п'ятого постулату, є спільною частиною геометрії Евкліда і Лобачевського.

Таким чином, в основі геометрії Лобачевського лежать всі твердження абсолютної геометрії і ***аксіома Лобачевського, яка полягає в тому, що через точку, яка не належить до даної прямої, у площині, що ними визначається, можна провести не менше двох прямих, які дану пряму не перетинають.***

Площину і простір, де разом з абсолютною геометрією виконується аксіома Лобачевського та наслідки з неї, називають відповідно площиною і простором Лобачевського або гіперболічною площиною і гіперболічним простором. Для доведення несуперечливості геометрії Лобачевського була побудована інтерпретація італійського вченого Е. Бельтрамі. В своїй роботі «Досвід інтерпретації неевклідової геометрії» Бельтрамі показав, що існують реальні тіла, на поверхні яких виконується геометрія Лобачевського. Цей висновок італійського математика був вражаючим: виявилось, що в евклідовому реальному світі є об'єкти неевклідової природи. В евклідовому просторі існує поверхня від'ємної кривини, яка називається псевдосферою, на якій в системі геодезичних ліній виконується геометрія Лобачевського.

Прямі, трикутники, чотирикутники, криві та інші фігури на гіперболічній площині мають специфічні властивості. Наприклад, якщо на евклідовій площині існують два види прямих а саме: прямі, що перетинаються, та паралельні прямі, то на площині Лобачевського існують три види прямих, а саме: прямі, що перетинаються, або збіжні прямі – це пучок прямих з власною вершиною – еліптичний пучок; паралельні прямі – це пучок прямих з невласною вершиною – параболічний пучок та розбіжні прямі – це пучок з ідеальною вершиною – гіперболічний пучок.

Для паралельних прямих на площині Лобачевського важливий напрямок паралельності і вони мають багато властивостей, відмінних від властивостей паралельних прямих на евклідовій площині. Так наприклад, відстань між паралельними прямими на евклідовій площині є сталою величиною, а на гіперболічній площині відстань між паралельними прямими необмежено зменшується в напрямку кута паралельності і може стати меншою за наперед заданий, як завгодно малий, відрізок, тобто в напрямку кута паралельності паралельні прямі асимптотично наближаються; в протилежному напрямку відстань необмежено зростає і може стати більшою за наперед заданий, як завгодно великий, відрізок, тобто в напрямку, протилежному до кута паралельності паралельні прямі асимптотично розходяться.

На істотну відмінність геометрії Лобачевського від евклідової геометрії вказує і наявність функції Лобачевського, яка пов'язує відрізки з кутами. Такої функції немає на евклідовій площині. Цим пояснюється необхідність збереження в евклідовій геометрії еталону довжини, не дивлячись на те, що існує природна одиниця міри кутів. В геометрії Лобачевського в цьому немає ніякої потреби, оскільки тут за одиницю довжини можна взяти відрізок, який називається стрілкою кута паралельності, що відповідає певному куту паралельності.

В геометрії Лобачевського є чотири види ліній сталої кривини: пряма, коло, еквідистанта (гіперцикл) і гранична лінія (орицикл). Орицикл може «ковзати» сам по собі без деформації, як коло і пряма. Цією властивістю володіє і еквідистанта: якщо база еквідистанти буде «ковзати» сама по собі, то і еквідистанта буде «ковзати» сама по собі без деформації, оскільки відстані всіх точок еквідистанти від бази, рівні між собою.

Через будь-які три точки площини Лобачевського проходить крива сталої кривини. На відміну від кола гранична лінія (орицикл) і еквідистанта (гіперцикл) є незамкненими лініями в площині Лобачевського. А пряма, як база гіперболічного пучка, є частинним випадком еквідистанти. [9]

Для доведення несуперечливості геометрії Лобачевського розглядають декілька її моделей [10], а саме: інтерпретацію італійського вченого Е. Бельтрамі – в евклідовому просторі існує поверхня від'ємної кривини, яка називається псевдосферою, на якій в системі геодезичних ліній виконується (локально) лише планіметрія Лобачевського; інтерпретацію німецького математика Ф. Клейна, який запропонував оригінальне тлумачення геометрії Лобачевського на звичайних зразках евклідової геометрії і не тільки для всієї планіметрії, але і для всієї стереометрії. Праця Клейна виявилася величним тріумфом у справі остаточного визнання геометрії Лобачевського як логічно стрункої геометричної системи. І на питання про реальність геометрії Лобачевського, вже без всіляких коливань можна дати позитивну відповідь, а саме: геометрія Лобачевського реальна настільки, наскільки реальна евклідова геометрія, а та, в свою чергу, несуперечлива настільки, наскільки несуперечлива арифметика дійсних чисел; несуперечливість останньої доведена багатовіковою практикою людського суспільства в найширшому розумінні цього слова. Також цікаві моделі аксіоматики планіметрії Лобачевського, які запропонував відомий французький математик і філософ Анрі Пуанкаре.

Висновки. Питання, пов’язані з вивченням неевклідової геометрії Лобачевського-Бояї, дуже тісно переплітаються з особливостями психології і теорії пізнання в цілому, з питаннями про те, яким чином виникають просторова уява та інтуїція, та слугують прекрасними зразками альтернативного мислення, надзичайної креативності, навчаючи думати критично та нестандартно водночас.

Список використаної літератури

1. Ґріффітс К. Посібник із креативного мислення / Кріс Ґріффітс і Меліна Кості. – Фабула-Видавництво, 2020. – 288 с.
2. Михалко М. 21 спосіб мислити креативно / Майкл Михалко. – Клуб сімейного дозвілля, 2020. – 413 с.
3. О’Конор Дж. Системне мислення. Пошук неординарних рішень / Джосеф О’Конор, Ієн Макдермотт. – Наш Формат, 2018. – 240 с.
4. Як навчитися мислити креативно [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://gordonua.com/ukr/interesting/-jak-navchitisja-misliti-kreativno-492049.html.
5. Лобачевський [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki.
6. Видатний математик творець неевклідової геометрії 220 років від дня народження М. І. Лобачевського [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://kdpulibrary.ucoz.ru/index/vidatnij_matematik_tvorec_neevklidovoji_geometriji_220_rokiv_vid_dnja_narodzhennja_m_i_lobachevskogo/0-88.
7. Трайнин Я. Л. Основания геометрии / Я. Л. Трайнин. – М.: Учпедгиз, 1961. – 326 с.
8. Шаповалова Н. В. Криві на площині Лобачевського. Навч.-метод. посібник для студ. матем. спец. ВНЗ / Н. В. Шаповалова, Л. Л. Панченко. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – 32 с.
9. Данилевський М. П. Основи сферичної геометрії та тригонометрії: навчальний посібник / М. П. Данилевський, А. І. Колосов, А. В. Якунін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 92 с
10. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского / П. А. Широков. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 80 с.