

Бєсєдіна Д.Г., бакалавр, Ярмоленко М.В., проф.

Київський національний університет технологій та дизайну

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Анотація. В статті розглянуто методи розв'язування деяких фізичних задач, які відсутні у збірниках задач для здобувачів вищої освіти: процес розчинення металевого анода, процес пірнання олівця у воду, визначення в'язкості рідини за часом її витікання через горизонтальний капіляр з вертикальної посудини, процес перенесення речовини вздовж дислокаційної трубки з одночасним проникненням у об'єм, процес перенесення речовини вздовж міжфазних меж з одночасним проникненням у об'єм.

Ключові слова: фізичні задачі; диференційні рівняння.

Biesiedina D., Yarmolenko M.

Kyiv National University of Technologies and Design

METHODS TO SOLVE PHYSICS PROBLEMS BY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. The article considers methods to solve some Physics problems that are absent in books for higher education students: dissolving of a metal anode, diving a pencil into water, determining the viscosity of a liquid by the time it flows out through a horizontal capillary from a vertical vessel, the process of transfer of matter along the dislocation tube with simultaneous penetration into the volume, the process of transfer of matter along the interfacial boundaries with simultaneous penetration into the volume.

Keywords: physics problems; differential equations.

Вступ. Будь-який фізичний процес може бути описаний відповідним диференційним рівнянням. Не кожне диференційне рівняння має аналітичний розв'язок. Для того, щоб диференційне рівняння дифузії мало аналітичний розв'язок, необхідно робити відповідні фізично прийнятні припущення, які можуть значно спростити модель дифузії. В освітньому процесі диференційні рівняння можуть застосовуватися для вивчення фізичних законів. Для досягнення кращого результату навчання у закладах вищої освіти (ЗВО) реальний фізичний лабораторний практикум за певними розділами фізики може бути доповнений комп'ютерним моделюванням тих лабораторних робіт, виконання яких в реальному режимі або важко, або вимагає моделювання, що дозволяє краще зрозуміти суть фізичних процесів (так звана віртуальна фізична лабораторія) [1]. Комп'ютерне моделювання обов'язково ґрунтується на відповідних математичних моделях і відповідні комп'ютерні програми можуть обчислювати лише деякі проміжні значення, а диференційні рівняння дають змогу дослідити процес від початку до кінця. Василь Олександрович Сухомлинський дав дуже важливу 36-ту пораду вчителю: «Наочність – стежка пізнання і світло, яке освітлює цю стежку» [2].

Постановка завдання. Електричний струм може зруйнувати з'єднання дротів у приладах мікроелектроніки. Ці мікродроги виготовляють із золота (Au), срібла (Ag), міді (Cu), алюмінію (Al) або з інших матеріалів та сплавів. Ми запланували дослідити електричну корозію міді та алюмінію, адже експериментально встановлено, що тонкий Al шар (товщиною близько 1 мкм) може запобігти електричній корозії золота і міді. Постійний струм може розчиняти металевий анод в електроліт, тому ми планували робити експерименти в однакових умовах: початкові радіуси анодів Al і Cu повинні бути однаковими, концентрація електроліту повинна бути такою ж, довжини частин анодів, занурених в електроліт, мають бути приблизно однаковими, графітові катоди повинні бути однаковими, величина постійного електричного струму має бути практично однаковою.

Результати досліджень.

Метод 1. Для дослідження електричної корозії міді та алюмінію були використані циліндричні аноди (99.99% Cu та 99.99% Al). Електролітом був концентрований ($C_{\text{Cl}}=5$ моль/л) розчин хлориду натрію (NaCl) (рис. 1) [4 – 7]. Були виміряні величина постійного струму та зменшення маси анодів. Перш за все, необхідно було впевнитися, що іони Cu^+ (чи Cu^{2+}) та Al^{3+} дійсно були у розчині NaCl. Швидкість розчинення анодів у електроліт може бути обчислена за допомогою диференційного рівняння закону Фарадея для електролізу:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{MI}{zF}, \quad dm = \rho \cdot L \cdot \pi \cdot d(R^2(t)), \quad (1.1)$$

де m – маса аноду, яка розчинилася у електроліт;

t – час електролізу;

M – молярна маса;

I – величина постійного струму;

F – постійна Фарадея ($F = 96485.33289(59)$ Кл моль $^{-1} \approx 96500$ Кл/моль);

z – заряд іонів;

R – радіус анода;

L – довжина зануреної у електроліт частини анода.

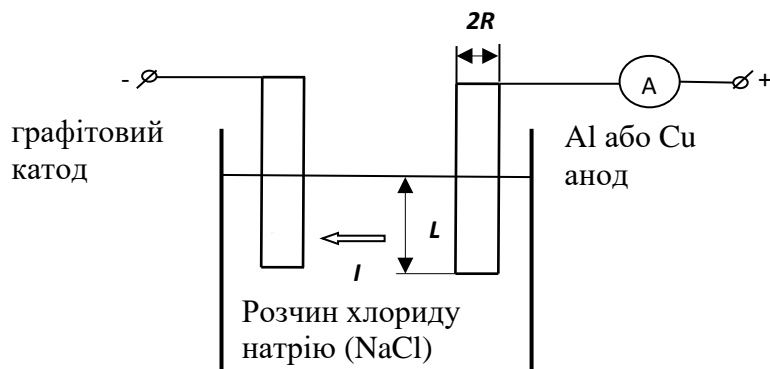


Рис. 1. Схема експериментального обладнання

Величина електричного струму практично не змінювалась, тому можемо обчислити:

$$z = \frac{MI t}{F \pi \rho L (R^2(t=0) - R^2(t))}, \quad (1.2)$$

де ρ – густина анода. Були обчислені заряди мідних та алюмінієвих іонів:

$$z_{\text{Cu}} = \frac{63,55 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{ моль} \cdot 2,8 \text{ А} \cdot 1,2 \cdot 10^3 \text{ с}}{F \cdot \pi \cdot 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{ м}^3 \cdot L_{\text{Cu}} \cdot (R_{\text{Cu}}^2(t=0) - R_{\text{Cu}}^2(t_4))} \approx 0,995 \approx 1; \quad (1.3)$$

$$z_{\text{Al}} = \frac{27 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{ моль} \cdot 3,1 \text{ А} \cdot 1,2 \cdot 10^3 \text{ с}}{F \cdot \pi \cdot 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{ м}^3 \cdot L_{\text{Al}} \cdot (R_{\text{Al}}^2(t=0) - R_{\text{Al}}^2(t_4))} \approx 2,954 \approx 3, \quad (1.4)$$

де $L_{Cu} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $L_{Al} = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $R_{Cu}(t=0) = 2,8 \text{ мм}$, $R_{Cu}(t=1200 \text{ с}) = 2,5 \text{ мм}$, $R_{Al}(t=0) = 2,8 \text{ мм}$, $R_{Al}(t=1200 \text{ с}) = 2,62 \text{ мм}$, отже, мідь розчиняється у розчин NaCl як іон Cu^+ , а алюміній розчиняється у розчин NaCl як іон Al^{3+} . Кінетика зменшення радіусів анодів показана на рис. 2.

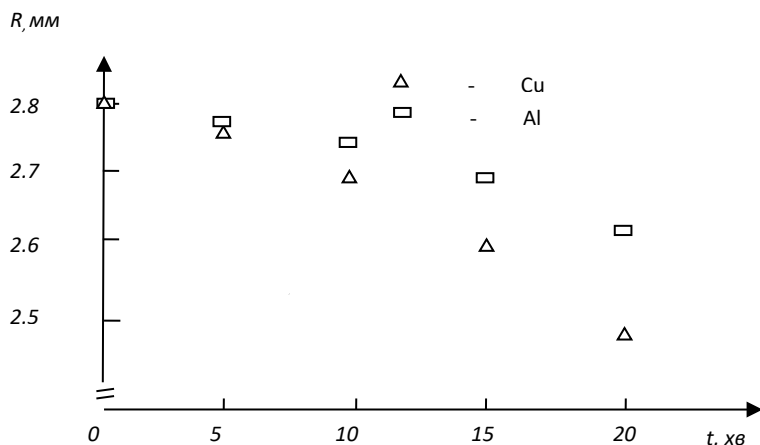
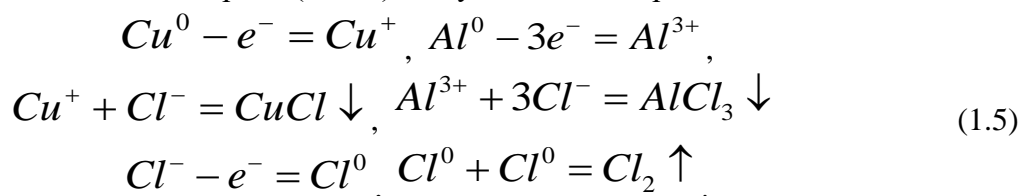


Рис. 2. Кінетика зменшення радіусів Al та Cu анодів

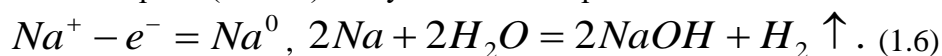
Експерименти проводили протягом $t_1 = 5 \text{ хв}$, $t_2 = 10 \text{ хв}$, $t_3 = 15 \text{ хв}$ та $t_4 = 20 \text{ хв}$. Результати експериментів такі: $R_{1Cu} = 2,74 \text{ мм}$, $R_{2Cu} = 2,67 \text{ мм}$, $R_{3Cu} = 2,59 \text{ мм}$, $R_{4Cu} = 2,5 \text{ мм}$; $R_{1Al} = 2,77 \text{ мм}$, $R_{2Al} = 2,73 \text{ мм}$, $R_{3Al} = 2,68 \text{ мм}$, $R_{4Al} = 2,62 \text{ мм}$. Точність вимірювань складала 0,01 мм, тобто 10 мікрометрів.

Біля позитивного електрода (анода) відбуваються такі реакції:



Біля анода виділяється газ хлор.

Біля негативного електрода (катода) відбуваються такі реакції:



Біля катода виділяється газ водень.

Константи швидкості зменшення радіусів анодів обчислювали як середнє значення чотирьох зроблених експериментів:

$$k_{Cu} = \frac{4R_0^2 - \sum_{i=1}^4 R_i^2}{\sum_{i=1}^4 t_i} \approx 1,25 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}, \quad (1.7)$$

$$k_{Al} = \frac{4R_0^2 - \sum_{i=1}^4 R_i^2}{\sum_{i=1}^4 t_i} \approx 7,29 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}, \quad k_{Cu} \approx 1,72 k_{Al}, \quad (1.8)$$

тобто електрична корозія міді набагато швидша, ніж електрична корозія алюмінію, незважаючи на те, що $I_{Al} \geq I_{Cu}$: $I_{Al} \approx 1,1 I_{Cu}$.

Варто зазначити, що k_i має таку ж розмірність, як коефіцієнт дифузії, тобто $[m^2/c]$ або [площа поверхні за секунду].

Метод 2. Розглянемо процес пірнання олівця у воду. Відповідне рівняння таке:

$$ma = mg - F_A, \quad (2.1)$$

де m – маса олівця, a – прискорення олівця, $g=9,8 \text{ м/с}^2$, F_A – виштовхувальна сила Архімеда. Оскільки прискорення – це друга похідна за часом від переміщення, отримаємо:

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2} = g - \frac{g}{\gamma H} z, \quad a(t=0) = g, \quad \gamma = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{z_0}{H}, \quad (2.2)$$

де z – глибина занурення олівця; H – його довжина; z_0 – глибина занурення олівця у стані рівноваги, коли сила тяжіння дорівнює силі Архімеда; ρ – густина води; ρ_1 – густина олівця. Сенс методу полягає в тому, що диференціальне рівняння перетворюється таким чином, щоб воно складалося з двох співмножників, один з яких не може тотожно дорівнювати нулю. Тоді інший співмножник має дорівнювати нулю тотожно.

Шукаємо розв'язок у такому вигляді:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g \cos(\omega t), \quad \frac{dz}{dt} = \frac{g}{\omega} \sin(\omega t), \quad (2.3)$$

$$z = \frac{g}{\omega^2} (-\cos(\omega t)) \Big|_0^t = \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)). \quad (2.4)$$

Підставивши формули (1.2.3) і (1.2.4) у формулу (1.2.2) отримаємо:

$$\left(\frac{g}{\gamma H \omega^2} - 1 \right) (1 - \cos(\omega t)) = 0. \quad (2.5)$$

Оскільки другий співмножник не може дорівнювати нулю тотожно для будь-якого часу, тому отримаємо:

$$\omega^2 = \frac{g}{\gamma H}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma H}{g}}. \quad (2.6)$$

Оскільки час пірнання приблизно дорівнює часу виринання, остаточно знаходимо:

$$t_{\downarrow} \approx t_{\uparrow} = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{\gamma H}{g}}. \quad (2.7)$$

Якщо $H = 20 \text{ см}$, $z_0 = 10 \text{ см}$ (олівець плаває у стані рівноваги наполовину занурившись у воду), то $t_{\downarrow} \approx t_{\uparrow} \approx 0,3 \text{ секунди}$, що співпадає з експериментально отриманими результатами.

Метод 3. Розглянемо процес витікання рідини з вертикальної посудини висотою H_0 через горизонтальний капіляр радіусом R , розташований біля її дна. Застосуємо закон Пуазейля (рівень рідини H зменшується):

$$dV = \frac{\Delta p R^4 \pi dt}{8\eta L}, \quad dV = -dH \pi R_1^2, \quad \Delta p = \rho g H. \quad (3.1)$$

У формулах (1.3.1) застосовані такі позначення: dV – об'єм рідини, що витікає з капіляра за час dt , Δp – різниця тисків рідини між входом у капіляр та виходом з капіляра, L – довжина капіляра, ρ – густина рідини, η – в'язкість рідини, R_1 – радіус вертикальної посудини. Отримаємо відповідне диференціальне рівняння:

$$-\frac{dH}{H} = \frac{\rho g R^4 dt}{8R_1^2 \eta L}, \quad (3.2)$$

яке має такий розв'язок:
$$-\ln H \Big|_{H_0}^{2R} = \frac{\rho g R^4 t}{8R_1^2 \eta L} = \ln\left(\frac{H_0}{2R}\right). \quad (3.3)$$

Остаточно отримаємо:
$$\eta = \frac{\rho g R^4 t}{8R_1^2 L \ln\left(\frac{H_0}{2R}\right)}. \quad (3.4)$$

Відомо, що в'язкість рідин зменшується з підвищенням температури, тому експерименти проводилися для холодної та гарячої води. Циліндрична посудина мала висоту $H_0 = 120$ мм та внутрішній радіус $R_1 = 21$ мм, капіляр мав довжину $L = 103$ мм та внутрішній радіус $R = 1,32$ мм. Холодна вода ($T \approx 20^\circ\text{C}$) витікала з посудини за час $t_{хол} = 47$ секунд, а гаряча вода ($T \approx 90^\circ\text{C}$) витікала з посудини за час $t_{гар} = 38$ секунд. З підвищенням температури густина води зменшується. Табличні значення такі ([3], табл. 5 на с. 550): $\rho(T \approx 20^\circ\text{C}) \approx 998 \text{ кг/м}^3$, $\rho(T \approx 90^\circ\text{C}) \approx 978 \text{ кг/м}^3$. Обчислення за формулою (3.4) дали такі результати:

$$\eta(T \approx 20^\circ\text{C}) = \frac{\rho(T \approx 20^\circ\text{C}) t_{хол} g R^4}{8R_1^2 L \ln\left(\frac{H_0}{2R}\right)} \approx \rho t \cdot 2,143 \cdot 10^{-5} \approx 1,005 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

що співпадає з табличним значенням в'язкості води для $T \approx 20^\circ\text{C}$ ([3], табл. 10 на сторінці 551),

$$\eta(T \approx 90^\circ\text{C}) = \frac{\rho(T \approx 90^\circ\text{C}) t_{гар} g R^4}{8R_1^2 L \ln\left(\frac{H_0}{2R}\right)} \approx \rho t \cdot 2,143 \cdot 10^{-5} \approx 0,797 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

тобто в'язкість води зменшується на $0,03 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ при підвищенні температури на кожні 10°C . Метод має дуже хорошу точність і дозволяє демонструвати зміну в'язкості різних рідин від зміни температури, адже для цього необхідні лише термометр і секундомір.

Метод 4. Диференціальні рівняння перенесення речовини (процес дифузії) подібні до диференціальних рівнянь теплопровідності:

$$j(t, x) = \frac{dm}{dt} \frac{1}{\rho S} = -D \frac{dC}{dx}. \quad (4.1)$$

У формулі (4.1) застосовані такі позначення: $j(t, x)$ – швидкість перенесення речовини (густина потоку речовини), dm – маса речовини, яка переноситься за час dt , ρ – густина речовини, яка переноситься, S – площа, через яку речовина переноситься, D – коефіцієнт дифузії, dC – зменшення відносної концентрації на проміжку dx вздовж напрямку дифузії. Густина потоку речовини залежить як від часу, так і від координати, тому рівняння (4.1) може мати аналітичний розв'язок лише для дуже спрощених моделей, які, проте, фізично правильно відображають відповідне явище. Таким явищем може бути дифузія вздовж дислокаційних трубок з одночасним проникненням у об'єм. Тоді замість рівняння (4.1) отримаємо таке рівняння, яке може бути розв'язане аналітично:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{A}{y(t)} - B_d \frac{y(t)}{\sqrt[3]{t}}. \quad (4.2)$$

Це рівняння може бути спрощене таким чином:

$$\frac{dz(t)}{dt} = 2A - \frac{2B_d}{\sqrt[3]{t}} z(t), \text{ де } z(t) = u(t)v(t) = y^2(t), \quad (4.3)$$

$$\frac{du(t)}{dt} v(t) + u(t) \left(\frac{dv(t)}{dt} + \frac{2B_d}{\sqrt{t}} v(t) \right) = 2A. \quad (4.4)$$

Припущення $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{2B_d}{\sqrt{t}} v(t) = 0$ дає такий розв'язок:

$$v(t) = e^{-3B_d \sqrt[3]{t^2}} = e^{-m^2}, \text{ де } m^2 = 3B_d t^{2/3} \text{ або } m = \sqrt{3B_d} t^{1/3}. \quad (4.5)$$

Подальший процес розв'язування наведено у роботі [8].

Остаточно отримаємо:

$$y(t) = \sqrt{\frac{A}{B_d} \sqrt[3]{t} - \frac{Ae^{-m^2}}{\sqrt{3B_d^3}} \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \frac{1 - e^{-\frac{4}{\sqrt{\pi}}mi}}{1 + e^{-\frac{4}{\sqrt{\pi}}mi}}}, \quad (4.6)$$

де i – уявна одиниця, тобто $i^2 = -1$. Це рівняння є точним розв'язком рівняння (4.2), а наближений закон, який фізично правильно відображає дифузію вздовж дислокаційних

трубок з одночасним проникненням у об'єм, такий: $y(t) = \left(\frac{A}{B_d} \right)^{1/2} t^{1/6}$, тобто глибина проникнення пропорційна кореню шостого степеня з часу дифузії.

Метод 5. Ми можемо також описати процеси перенесення речовини вздовж міжфазних меж у полікристалах. Замість рівняння (4.2) отримаємо таке рівняння, яке може бути розв'язане аналітично [9]:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{A}{y(t)} - B \frac{y(t)}{\sqrt{t}} \quad (5.1)$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{A}{B} \sqrt{t} - \frac{A}{4B^2} \frac{1 - e^{-4B\sqrt{t}}}{1}} \quad (5.2)$$

Це рівняння є точним розв'язком рівняння (5.1), а наближений закон, який фізично правильно відображає дифузію вздовж міжфазних меж у полікристалах з

одночасним проникненням у об'єм, такий: $y(t) = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/2} t^{1/4}$, тобто глибина проникнення пропорційна кореню четвертого степеня з часу дифузії.

Висновки:

1. Експериментально визначено заряди мідних та алюмінієвих іонів за допомогою диференційного рівняння закону Фарадея для електролізу без використання новітніх приладів, таких як електронні мікроскопи та інші. Отримано важливий практичний результат: електрична корозія міді значно швидша, ніж електрична корозія алюмінію, тому тонке алюмінієве покриття товщиною близько 1 мікрметра на мідних дротинках може уповільнити корозію міді у приладах мікроелектроніки.

2. Запропоновано метод розв'язування диференційного рівняння, яке описує процес пірнання олівця у воду. Теоретичні результати порівняні з експериментальними.

3. Описано метод визначення в'язкості рідини за часом її витікання через горизонтальний капіляр з вертикальної посудини, використовуючи відповідне диференційне рівняння та закон Пуазейля. Експериментально визначена в'язкість різних рідин та розчинів.

4. Проаналізовано процес перенесення речовини вздовж дислокаційної трубки з одночасним проникненням у об'єм, використовуючи відповідне диференційне рівняння.

5. Проаналізовано процес перенесення речовини вздовж міжфазних меж з одночасним проникненням у об'єм, використовуючи відповідне диференційне рівняння.

Список використаної літератури

1. Ярмоленко М. В. Принципи інтерактивного навчання основ фізики на основі віртуальних лабораторій. *Науковий огляд*. 2016. Т. 9, № 30. С. 139–149. URL: <https://naukajournal.org/index.php/naukajournal/article/view/956>.
2. Сухомлинський В. О. Сто порад учителю. Київ: Рад. школа, 1984. 254 с.
3. Гаркуша І. П., Горбачук І. Т., Курінний В. П. та ін. Загальний курс фізики: збірник задач. Київ: Техніка, 2003. 560 с.
4. Yarmolenko M. V. Intermetallics Disappearance Rate Analysis in Double Multiphase Systems. *DDF*. 2021. 407: 68–86. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ddf.407.68>.
5. Yarmolenko M. V. Intermetallics Disappearance Rates and Intrinsic Diffusivities Ratios Analysis in the Cu-Zn and the Cu-Sn Systems. *Phys. Chem. Solid St.* 2021. 22 (1): 80–87. URL: <https://journals.pnu.edu.ua/index.php/pcss/article/view/4744>.
6. Yarmolenko M. V. Copper and aluminum electric corrosion investigation and intermetallics disappearance in Cu-Al system analysis. *Phys. Chem. Solid St.* 2020. 21 (2): 294–299. URL: <https://journals.pnu.edu.ua/index.php/pcss/article/view/3055>.
7. Yarmolenko M. V. Intrinsic Diffusivities Ratio Analysis in the Al-Cu System. *Phys. Chem. Solid St.* 2020. 21(4): 720–726. URL: <https://journals.pnu.edu.ua/index.php/pcss/article/view/4440>.
8. Yarmolenko M. V. Intermediate phase cone growth kinetics along dislocation pipes inside polycrystal grains. *AIP Advances*. 2018. 8: 095202. <https://doi.org/10.1063/1.5041728>.
9. Yarmolenko M. V. Analytically Solvable Differential Diffusion Equations Describing the Intermediate Phase Growth. *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.* 2018. 40 (9): 1201–1207. URL: <https://mfint.imp.kiev.ua/article/v40/i09/MFiNT.40.1201.pdf>.