

**Блохін О.Л., доц., Жлалі Ж.Т., студент**

*Київський національний університет технологій та дизайну*

### **СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ІНДИКАТОРА MACD**

**Анотація.** Робота присвячена дослідженню спектральних характеристик індикатора MACD, який застосовується при аналізі випадкових процесів, при прогнозуванні поведінки біржових та валютних котувань. Знайдені формули для представлення цього індикатора як послідовності чотирьох лінійних цифрових фільтрів. Представлені графіки амплітудної та фазової спектральних щільностей.

**Ключові слова:** дискретний процес; часовий ряд; спектральний аналіз; спектр; різнищеві рівняння; індикатор MACD; цифрова фільтрація; лінійні системи.

**Blokhin O., Zhlali Zh.**

*Kyiv National University of Technologies and Design*

### **SPECTRAL PROPERTIES OF MACD INDICATOR**

**Abstract.** The work is devoted to the study of the spectral characteristics of the MACD indicator, which is used in the analysis of random processes, in predicting the behavior of stock and currency quotes. Formulas have been found to represent this indicator as a sequence of four linear digital filters. Graphs of amplitude and phase spectral densities are presented.

**Keywords:** discrete process; time series; spectral analysis; spectrum; difference equations; MACD indicator; digital filtering; linear systems.

**Вступ.** Індикатор MACD (Moving Average Convergence/Divergence – сходження/розходження ковзних середніх) – технічний індикатор, розроблений Джеральдом Аппелем, який використовується в технічному аналізі для оцінки та прогнозування коливань цін на фондовій та валютній біржах.

MACD вважається одним із основних індикаторів технічного аналізу, можливо, другим за популярністю після Moving Average. Цей інструмент застосовується як у простих стратегіях для трейдерів-початківців, так і в просунутих системах професіоналів.

Індикатор використовують для перевірки сили та напрямки тренду, а також визначення розворотних точок. Будується на основі ковзних середніх. Існує дві модифікації індикатора MACD: лінійний MACD та MACD-гістограма.

Для розрахунку лінійного MACD із ковзної середньої ціни (зазвичай береться експоненційна ковзна середня з меншим періодом) віднімається експоненційна ковзна середня з великим періодом. У більшості випадків отриманий результат згладжують за допомогою експоненційної середньої ковзної (ЕМА), щоб усунути випадкові коливання.

$$1) \text{MACD} = \text{EMA}_N(P) - \text{EMA}_M(P).$$

$$2) \text{Signal} = \text{EMA}_K(\text{EMA}_N(P) - \text{EMA}_M(P)) - \text{(сигнальна лінія)},$$

де:

-  $\text{EMA}_N(P)$  – експоненційна ковзна середня з коротким періодом  $N$  від ціни.

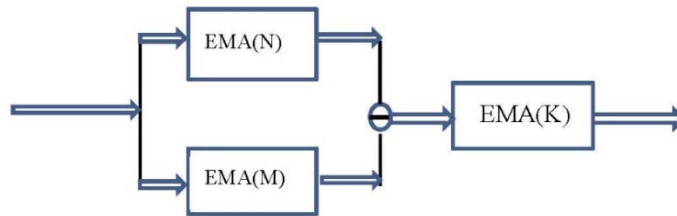
-  $\text{EMA}_M(P)$  – експоненційна ковзна середня з довгим періодом  $M$  від ціни

-  $\text{EMA}_K$  – ковзна середня з коротким періодом  $K$  від різниці двох інших ковзаючих, що згладжує.

-  $P$  – ціна, зазвичай, береться ціна закриття періоду Close, але можливі й інші варіанти (Open, High, Low, Close, Median Price, Typical Price і т.д.)

За замовчуванням на денному графіку часто використовують наступні настройки MACD:

- $EMA_N(P)$  – (коротка) з періодом  $N = 12$  днів (два тижні)..
- $EMA_M(P)$  – (довга) з періодом днів  $M = 26$  (місяць)
- $EMA_K$  – (яка згладжує різницю) з періодом  $K = 9$  значень.



Значення ціни  $P(t)$  на момент часу  $t$  можна розглядати як значення дискретного часового ряду  $x(n)$ . При цьому експоненційну ковзну середню можна розглядати з погляду системного аналізу як лінійну, інваріантну за часом систему (ЛТІ-систему). Тоді сигнальна лінія індикатора MACD буде результатом виконання такої послідовності операторів

При такій постановці завдання на вхід системи подається дискретний сигнал  $x(n)$  і на виході системи отримуємо дискретний сигнал  $y(n)$ . Завдання спектрального аналізу системи складається із дослідження залежності спектральних характеристик вихідного сигналу залежно від спектральних характеристик вхідного сигналу та структури системи.

Нині у літературі відсутній опис спектральної поведінки індикатора MACD, попри його широке практичне застосування.

Мета цієї роботи – заповнити таку прогалину.

### Результати досліджень.

Експоненційна ковзна середня визначається таким різницеvim рівнянням

$$x(n) \xrightarrow{EMA} y(n)$$

$$y(n) = \alpha x(n) + \beta y(n-1) \quad \text{або} \quad y(n) - \beta y(n-1) = \alpha x(n)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – параметри усереднення:  $\alpha + \beta = 1$ ,  $0 < \alpha, \beta < 1$ . Параметр  $\alpha$  пов'язаний із шириною вікна фільтра  $N$  (число періодів за якими проводиться усереднення) формулою  $\alpha = \frac{2}{N+1}$ , при цьому  $\beta = 1 - \alpha = \frac{N-1}{N+1}$

Виконаємо Z-перетворення:

$$x(n) \longleftrightarrow X(z) \quad y(n) \longleftrightarrow Y(z)$$

$$Y(z)(1 - \beta z^{-1}) = \alpha X(z) \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

де  $H(z)$  – Z-перетворення передавальної функції системи.

Звідси випливає  $H(z) = \frac{\alpha}{1 - \beta z^{-1}}$ , область збіжності  $|z| > \beta < 1$ . Ця функція сходиться на одиничному колі в комплексній площині. При підстановці  $z = \exp(i\omega)$  отримуємо перетворення Фур'є передавальної функції – функцію спектральної щільності системи.

$$H(\omega) = \frac{\alpha}{1 - \beta \exp(i\omega)}$$

Оскільки ЕМА є лінійною системою, то різниці ЕМА відповідає різниця – Z-перетворень

$$EMA_N - EMA_M \xrightarrow{z} H_N(z) - H_M(z)$$

а послідовному виконанню операторів відповідає множення Z-перетворень

$$EMA_K(EMA_N - EMA_M) \xrightarrow{z} H_K(z)(H_N(z) - H_M(z)).$$

Таким чином, сигнальної лінії індикатора MACD відповідає спектральна функція

$$H(\omega) = \left( \frac{\alpha}{1 - \beta \exp(i\omega)} - \frac{\gamma}{1 - \delta \exp(i\omega)} \right) \frac{\lambda}{1 - \mu \exp(i\omega)}$$

$$\alpha = \frac{2}{N+1}; \beta = \frac{N-1}{N+1}; \gamma = \frac{2}{M+1}; \delta = \frac{M-1}{M+1}; \lambda = \frac{2}{K+1}; \mu = \frac{K-1}{K+1};$$

Шляхом нескладних перетворень можна отримати

$$\frac{\alpha}{1 - \beta z^{-1}} - \frac{\gamma}{1 - \delta z^{-1}} = (\alpha - \gamma) \frac{1 - z^{-1}}{(1 - \beta z^{-1})(1 - \delta z^{-1})} = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha \gamma} (1 - z^{-1}) \frac{\alpha}{1 - \beta z^{-1}} \frac{\gamma}{1 - \delta z^{-1}}$$

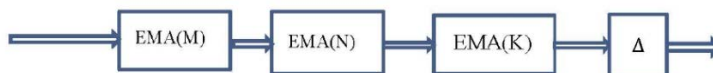
Це показує, що Z-перетворення різниці  $EMA_N - EMA_M$  складається з постійного множника  $\frac{\alpha - \gamma}{\alpha \gamma}$ , Z-перетворень  $EMA_N$  і  $EMA_M$  та третього множника  $(1 - z^{-1})$ . Цей третій множник є Z-перетворенням скінченної різниці  $\Delta = 1 - L$ , де  $L$  – лаговий оператор .

$$\Delta(x(n)) = x(n) - x(n-1)$$

Таким чином, індикатор MACD можна представити у вигляді чотирьох послідовно виконуваних операторів, оскільки його Z-перетворення представлено у вигляді добутку Z-перетворень чотирьох множників – трьох ЕМА і одного  $\Delta$ .

$$EMA_N - EMA_M \xrightarrow{z} \frac{M - N}{2} H_\Delta(z) H_N(z) H_M(z)$$

$$EMA_K(EMA_N - EMA_M) \xrightarrow{z} \frac{M - N}{2} H_\Delta(z) H_N(z) H_M(z) H_K(z)$$



При цьому, оскільки для LTI-систем операція згортки, що відповідає множенню Z-перетворень, є комутативною, все одно, в якому порядку виконуються ці чотири оператори.

Спектральна функція індикатора MACD може бути представлена у вигляді

$$H(\omega) = \frac{M - N}{2} \left( \frac{\alpha}{1 - \beta \exp(-i\omega)} \right) \left( \frac{\gamma}{1 - \delta \exp(-i\omega)} \right) \left( \frac{\lambda}{1 - \mu \exp(-i\omega)} \right) (1 - \exp(-i\omega))$$

Така форма подання зручна для аналізу розподілу спектральної щільності амплітуди та фази. Амплітуда буде добуток амплітуд множників, а фаза – сума відповідних фаз.

Змістовний зміст такого представлення спектральної функції полягає в наступному: індикатор MACD еквівалентний потрібному послідовному згладжуванню вхідного сигналу за допомогою експоненціальних ковзних середніх з різною шириною вікон і взяття кінцевої різниці. При цьому потрібне згладжування дозволяє позбавитися випадкових високочастотних шумів, а оператор  $\Delta$  прибирає лінійний тренд або знижує порядок поліноміального тренду.

Для обчислення амплітудного спектра перші множники зручно подати у вигляді

$$|H_N(\omega)| = \left| \frac{\alpha}{1 - \beta \exp(-i\omega)} \right| = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\beta \cos \omega + \beta^2}}$$

А для останнього множника у вигляді

$$H_\Delta(\omega) = 1 - e^{-i\omega} = e^{-i\omega/2} (e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}) = 2ie^{-i\omega/2} \sin(\omega/2) \quad |H_\Delta(\omega)| = 2|\sin(\omega/2)|$$

Для визначення фазового спектру знаходимо фазу кожного множника

$$\text{Arg}H_N(\omega) = -\text{arctg} \left( \frac{\beta \sin \omega}{1 - \beta \cos \omega} \right)$$

$$\text{Arg}(H_\Delta(\omega)) = \begin{cases} \pi/2 - \omega/2, & \text{якщо } \omega > 0 \\ -\pi/2 - \omega/2, & \text{якщо } \omega < 0 \end{cases}$$

На наступних графіках щільності фазового спектру аргумент  $\omega$  приведено до стандартного інтервалу  $(-1; +1)$  за допомогою заміни змінних  $\omega \longrightarrow \pi\omega$ . Усі амплітудні спектральні щільності – парні функції.

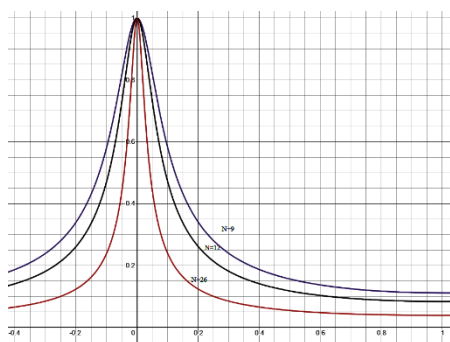


Рис. 1

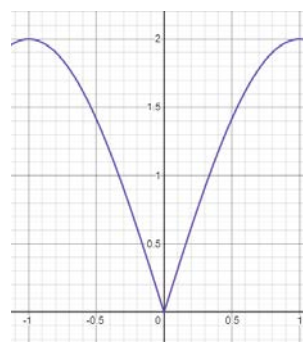


Рис. 2

На рис. 1 наведено графіки амплітудних спектральних щільностей експоненціальних ковзних середніх зі стандартними віконними параметрами,  $N = 12$ ,  $M = 26$ ,  $K = 9$ . З графіка видно, що вони тою чи іншою мірою послаблюють високі частоти, у яких зазвичай зосереджені випадкові шуми. На рис. 2 наведено графік спектральної щільності четвертого множника – кінцевої різниці  $\Delta$ . Цей фільтр, навпаки, прибирає лінійний тренд разом з частиною низьких частот, зберігаючи високі частоти. При

перемноженні чотирьох кривих та постійного множника  $\frac{M-N}{2}$  отримусмо графік спектральної густини індикатора MACD, який наведено на рис. 3.



Рис. 3

На наступних малюнках зображені фазові спектральні щільності. На рис. 4 наведено графіки трьох фазових спектрів перших трьох множників у загальному складі фази MACD – експоненційних ковзних середніх із зазначеними віконними параметрами. На малюнку 5-фазовий спектр кінцевої різниці. На малюнку 6 зображено фазовий спектр MACD.

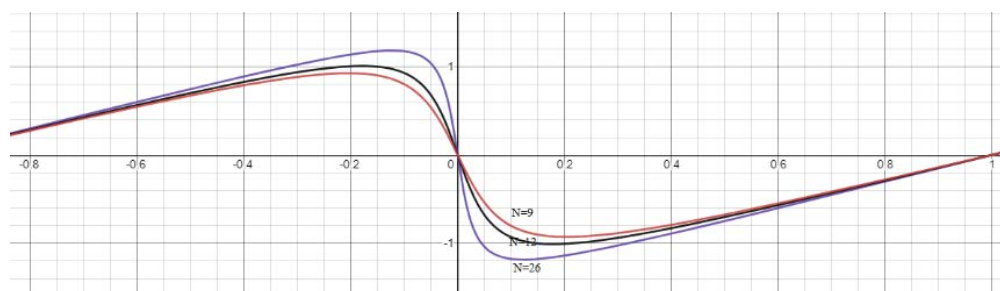


Рис. 4

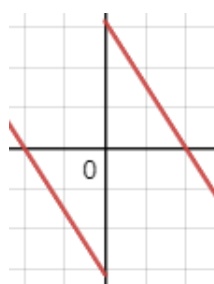


Рис. 5

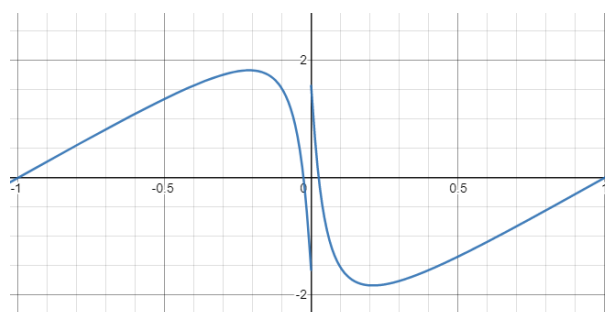


Рис. 6

**Висновки.** Результати спектрального дослідження індикатора MACD показують, що його можна розглядати як цифровий фільтр, який послаблює високі частоти у вхідному сигналі. Ступінь ослаблення за конкретними частотами залежить від трьох вхідних параметрів, що визначаються шириною вікон. Крім того, цей фільтр видаляє лінійний тренд, що призводить до деякого провалу за низькими частотами. Несподіваний результат, про який не знають практикуючі трейдери, полягає в тому, що для використання індикатора несуттєво, в якій послідовності застосовують віконні

коефіцієнт  $N$ ,  $M$ ,  $K$  – при перестановці цієї трійки змінюється лише скалярний множник.

### Список використаної літератури

1. Papoulis A. Signal analysis. N.Y.: Dover Publications, 2018. 448 p.
2. Ambardar A. Analog and Digital Signal Processing. N.Y.: Brooks, 1999. 807 p.
3. Hamilton J. D. Time series analysis. Princeton University Press, 1994. 799 p.
4. Brockwell P. J., Davis R. A. Introduction to Time Series and Forecasting. *Springer Texts in Statistics*. 2002. 434 p.
5. Koopmans L. H. The spectral analysis of times series. Academic Press, 1995. 366 p.
6. Oppenheim A. V., Willsky A. S. Signals and Systems. Prentice Hall, 1997. 957 p.
7. Oppenheim A. V., Schaffer R. W. Discrete-Time Signal Processing. Pearson, 2010. 1108 p.
8. Smith S. Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists. Elsevier, 2002. 664 p.
9. Lathi B. P., Green R. A. Linear systems and signals. Oxford University Press, 2018. 988 p.