

УДК 677.055

В. В. Чабан

Киевский национальный университет технологий и дизайна

АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К РАСЧЕТУ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО СТАБИЛИЗАТОРА ДИНАМИЧЕСКОГО НАТЯЖЕНИЯ НИТЕЙ ОСНОВЫ

Представлены результаты анализа подходов к расчету высокочастотного стабилизатора натяжения нитей основы основывающейся машины. Установлено, что расчет высокочастотного стабилизатора динамического натяжения ниток основы можно выполнить только численными методами, причем предпочтение следует отдать методу конечных элементов.

Ключевые слова: основывающаяся машина, натяжение нитей основы, стабилизатор натяжения нитей основы, метод расчета стабилизатора натяжения нитей основы.

Надежность и эффективность работы основывающихся машин (повышение производительности и качества полотна) существенно зависят от стабильности натяжения нитей основы [1]–[3].

Перспективным направлением повышения эффективности работы основывающихся машин является повышение стабильности натяжения нитей основы путем совершенствования соответствующих устройств — стабилизаторов динамического натяжения нитей основы (СДННО). Однако отсутствие научных основ и инженерных методов проектирования СДННО сдерживает решение данной проблемы.

Поскольку рабочим элементом СДННО является тонкая пластина [2], целью работы является анализ существующих методов расчета пластин и обоснование выбора подхода к расчету высокочастотного стабилизатора динамического натяжения нитей основы, расчетной схемой которого является тонкая треугольная пластина, ослабленная треугольным вырезом, с возможным наличием ребер жесткости.

На сегодняшний день можно выделить две основные теории расчета изгибаемых пластин. Общеизвестной классической теорией изгиба тонких пластин является теория Кирхгофа–Лява, которая базируется на двух гипотезах — статической и динамической. Альтернативой ей является теория Тимошенко (она относится к так называ-

емым «сдвиговым теориям»), и основана она на гипотезе о независимом повороте нормали. Эта гипотеза впервые была сформулирована в работе С. П. Тимошенко [4] и распространена Э. Рейснером на пластины [5] и оболочки [6]. При динамическом деформировании пластин она впервые была использована в работах Р. Миндлина [7]. Сдвиговые теории изначально разрабатывались для расчета толстых пластин, пластин средней толщины и композитных пластин.

Аналитические решения задач об изгибе пластин получены только для некоторых видов пластин и граничных условий.

Для вывода дифференциального уравнения, описывающего изгиб высокочастотного СДННО (рис. 1), рассмотрим, как это принято в теории упругости, три группы уравнений.

Уравнения совместности деформаций

Выделим бесконечно малый элемент со сторонами dx , dy (рис. 2) и запишем соотношения для его линейных и угловых деформаций (рис. 3) при изгибе пластины:

$$\varepsilon_x = \frac{|a'b'| - |ab|}{|ab|} = \frac{\left[dx + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u \right] - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$u = \theta z = -\frac{\partial w}{\partial x} z; \quad v = \psi z = -\frac{\partial w}{\partial y} z;$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2;$$

$$\gamma_1 \approx \text{tg} \gamma_1 = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - v}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial w}{\partial y} z \right);$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z; \quad \gamma_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z.$$

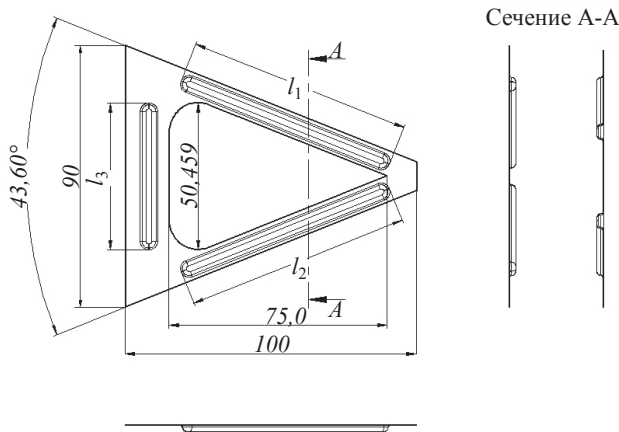


Рис. 1. Высокочастотный стабилизатор треугольной формы

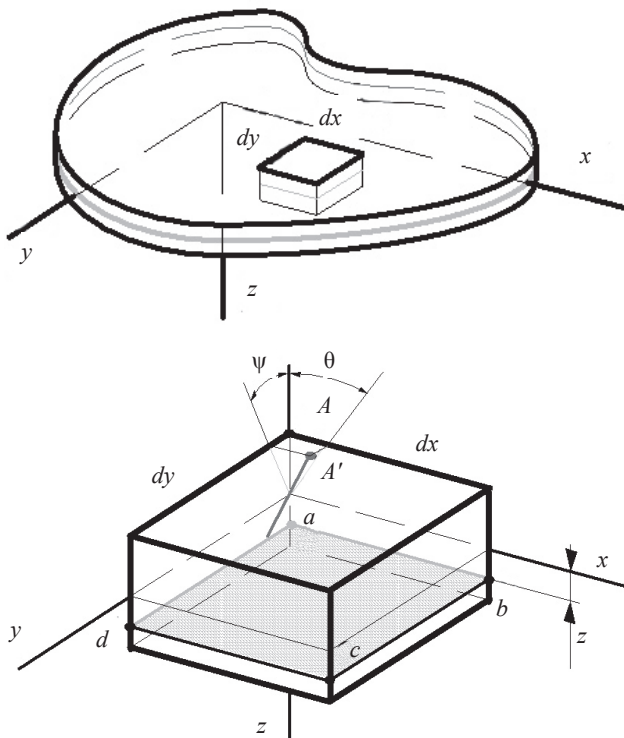


Рис. 2. Бесконечно малый элемент изгибаемой пластины

Закон Гука

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu\sigma_y}{E}; \epsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu\sigma_x}{E};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Уравнения равновесия

Для погонных изгибающих и крутящего моментов можно получить:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_x dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_y dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\tau_{yx} dz = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки.

Приложим к бесконечно малому элементу со сторонами dx и dy внешние по отношению к нему воздействия — изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы и нагрузку $q(x, y)$ (рис. 4).

Составим условия равновесия этого элемента. Проектируя все силы на вертикальную ось и сокращая полученное равенство на $dx dy$, получим:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0.$$

Суммы моментов всех сил относительно сторон AC и AB позволяют получить (пренебрегая величинами высшего порядка малости) еще два уравнения:

$$-\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0;$$

$$-\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + Q_y = 0.$$

Подставляя выражения изгибающих и крутящих моментов, находим:

$$\begin{cases} Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

В результате совместного использования приведенных соотношений после известных преобразований [8] получим дифференциальное уравнение изгиба пластины — уравнение Жермен–Лагранжа:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \tag{1}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}, \tag{2}$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. \tag{3}

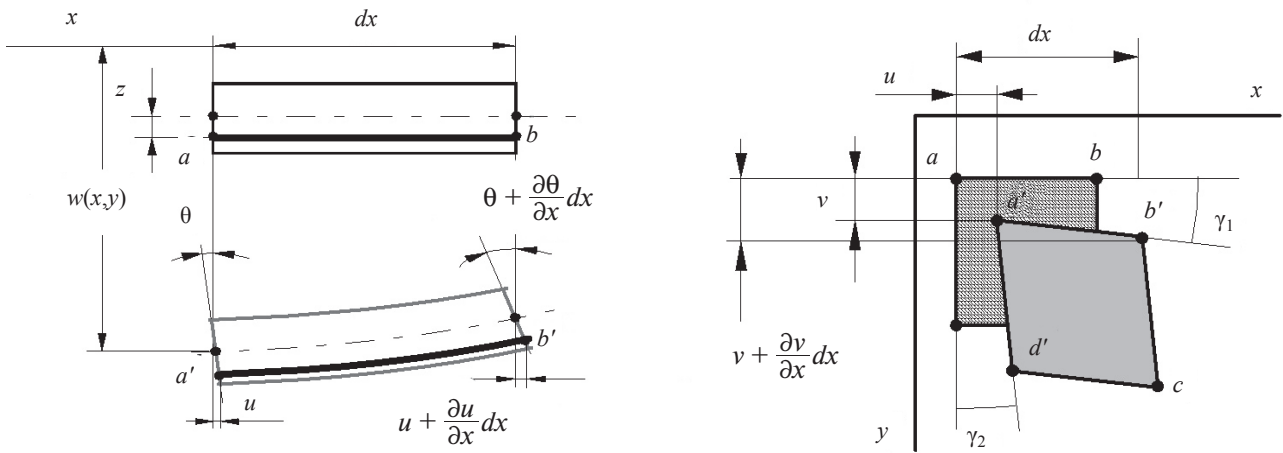


Рис. 3. Перемещения и деформации элемента изгибаемой пластины

Таким образом, расчет пластин сводится к интегрированию бигармонического уравнения (1) с различными граничными условиями. Точное решение этой задачи удастся получить лишь для нескольких случаев, когда граничные условия не препятствуют разделению пространственных переменных [4], [8], а пластинка является прямоугольной или круглой (кольцевой).

Наиболее известными методами решения уравнения (1) являются решения Навье и Леви, но они применимы только для прямоугольных пластин и при определенных граничных условиях.

Для пластинок другого очертания — трапецидальных, треугольных, в форме параллелограмма и т. д. — точных методов расчета не существует.

Здесь, как и при решении многих других задач механики твердого деформируемого тела, большое значение приобрели численные методы, основанные на вариационных постановках. К ним, в первую очередь, относится метод конечных элементов (МКЭ).

Преимущества вариационных методов очевидны как с теоретической, так и с практической точки зрения. Использование вариационных постановок задач в численных методах позволяет проще получать решения, так как функционалы имеют более низкий порядок производных искомых функций, чем в соответствующих дифференциальных уравнениях. На основе вариационных методов можно конструировать приближенные решения на классе кусочно-гладких функций, определенных в подобластях конечных размеров, в так называемых конечных элементах. Условия стыковки соседних конечных элементов требуют выполнения главных граничных условий вариационной задачи, которые зависят от порядка производных в функционалах. Чем ниже порядок производных искомых функций в исходных функционалах, тем проще построить локальные аппроксимации для конечных элементов,

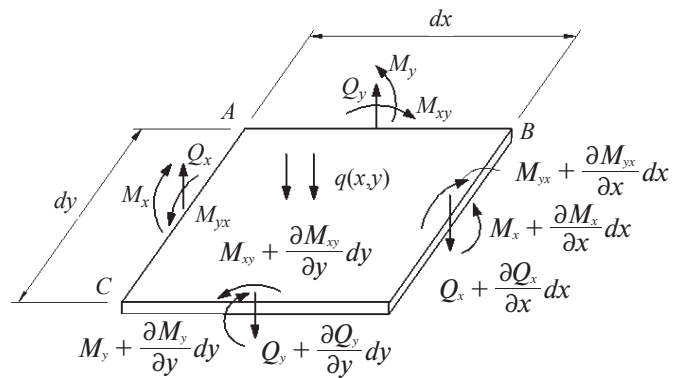


Рис. 4. Нагрузки на элемент пластины

удовлетворяющие условиям стыковки. Очевидным преимуществом вариационных методов является автоматическое выполнение естественных граничных условий. Другим преимуществом вариационных постановок является возможность применения двойственного анализа, т. е. получение с помощью приближенного решения верхних и нижних границ точного решения. Это осуществляется на основе применения двойственных вариационных принципов к одной и той же задаче. Все указанные теоретические преимущества вариационных постановок не были бы столь существенными, если бы практическая реализация методов конечных элементов оказалась сложной. Однако простота, экономичность и, главное, универсальность вычислительных алгоритмов для различных схем метода конечных элементов привели к тому, что в настоящее время этот метод является основным методом расчета разнообразных конструкций.

Существенный толчок в своем развитии МКЭ получил после того, как было доказано (1963), что этот метод можно рассматривать как один из вариантов известного в строительной механике метода Рэлея–Ритца, который путем минимизации потен-

циальной энергии позволяет свести задачу к системе линейных уравнений равновесия.

Связь МКЭ с процедурой минимизации позволила использовать его при решении задач в других областях техники. Метод применялся к задачам, описываемым уравнениями Лапласа или Пуассона. Решение этих уравнений также связано с минимизацией некоторого функционала. Известны решения с помощью этого метода задач распространения тепла, гидромеханики, в частности, задач о течении жидкости в пористой среде.

Область применения МКЭ существенно расширилась, когда было показано (1968), что уравнения, определяющие элементы в задачах строительной механики, распространения тепла, гидромеханики, могут быть получены с помощью таких вариантов метода взвешенных невязок, как метод Галеркина или метод наименьших квадратов. Это сыграло важную роль в теоретическом обосновании МКЭ, так как позволило применять его при решении многих типов дифференциальных уравнений.

Таким образом, метод конечных элементов из численной процедуры решения задач строительной механики превратился в общий метод численного решения дифференциальных уравнений или их систем.

В настоящее время количество компьютерных программ, реализующих метод конечных элементов, исчисляется десятками, если не сотнями. Среди них можно отметить таких гигантов, как ANSYS, NASTRAN, ABAQUS, возможности которых позволяют решать задачи разных областей знаний. В этих программах используется большое количество различных модификаций конечных элементов.

Рассмотрим сравнительный анализ теорий Кирхгофа–Лява и Тимошенко с позиций метода конечных элементов.

Классическая теория, основанная на гипотезе Кирхгофа–Лява, в выражениях для минимизируемых функционалов содержит вторые производные от искомой функции прогиба. Следовательно, главными граничными условиями вариационной задачи являются прогиб и первая производная, которые должны быть непрерывны на межэлементных границах. Построение согласованных конечно-элементных двумерных аппроксимаций в этом случае весьма затруднительно даже для плоских конечных элементов, а для оболочек произвольной формы является почти неразрешимой задачей. Построенные на базе теории Кирхгофа–Лява согласованные конечные элементы для пластин имеют высокий порядок аппроксимации, которая, кроме того, содержит неполные полиномы. Это ухудшает свойства конечных элементов, и их сходимости оказывается хуже, чем сходимости несогласованных конечных элементов. Применение неполных полиномов не позволяет также применять в решении изопараметрическую технику.

Широкое распространение в расчетах оболочек и пластин для линейных задач получили несогласованные конечные элементы. Для них выполняется условие неразрывности прогиба на межэлементных границах, но нарушается неразрывность первой производной от прогиба. Тем не менее в линейных задачах сходимость существует. Однако применение несогласованных конечных элементов для решения нелинейных задач может привести к непредсказуемым погрешностям. Проблему несогласованных аппроксимаций можно решать различными способами. Можно, например, обобщить существующие вариационные принципы на несогласованные аппроксимации путем введения в функционалы дополнительных интегралов, минимизирующих межэлементную несогласованность. Но это связано с дополнительными вычислительными затратами, которые не всегда оправданы.

Классическая теория была создана для сведения трехмерной задачи к двумерной, но это достигается ценой повышения порядка производной в исходных функционалах. Отметим, что функционалы теории упругости содержат лишь первые производные от искомых функций. С точки зрения эффективности решения задач деформирования оболочек и пластин вариационными методами, сведение трехмерной задачи к двумерной необходимо строить на базе теории, не повышающих порядок производной в исходных функционалах трехмерной теории упругости. Число искомых функций после приведения в данном случае имеет второстепенное значение, хотя желательно, чтобы оно было минимальным. Самой распространенной теорией, функционалы которой содержат только первые производные от перемещений, является теория оболочек и пластин Тимошенко.

Конечные элементы, используемые в инженерных программах для расчета изгибаемых тонких пластин, как правило, основаны на теории Кирхгофа–Лява.

Резюмируя проведенный анализ, можно констатировать, что расчет высокочастотного стабилизатора динамического натяжения ниток основы основязальной машины можно выполнить только численными методами, причем предпочтение следует отдать методу конечных элементов и какому-либо инженерному программному комплексу, реализующему алгоритм этого метода.

Литература

1. *Гарбарук, В. Н.* Проектирование трикотажных машин/В. Н. Гарбарук. — Л.: Машиностроение, 1980. — 472 с.
2. *Чабан, В. В.* Наукові основи проектування пристроїв натягу ниток основи машин легкої та текстильної промисловості/В. В. Чабан. — Киев: КНУТД, 2010. — 180 с.
3. *Чабан, В. В.* Динамика основов'язальних машин/В. В. Чабан, Л. А. Бакан, Б. Ф. Пипа. — Киев: КНУТД, 2012. — 287 с.

4. *Timoshenko, S. P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars/S. P. Timoshenko. — Philos. Mag. — 1921. — Vol. 41. — № 6. — P. 744–746.

5. *Reissner, E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates/E. Reissner // J. Appl. Mech. — 1945. — Vol. 12. — June. — P. A69 — A77.

6. *Reissner, E.* Stress-strain relations in the theory of thin elastic shells/E. Reissner // J. Math. Phys. — 1952. —

Vol. 31. — № 2. — P. 109–119.

7. *Mindlin, R. D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic rectangular plates/R. D. Mindlin // J. Appl. Mech. — 1951. — Vol. 18. — March. — P. 31–38.

8. *Александров, А. В.* Основы теории упругости и пластичности/А. В. Александров, В. Д. Потапов. — М.: Высшая школа, 1990. — 398 с.