

УДК 624.044:624.041.6

КОСТЮК А.И., СТОЛЕВИЧ И.А., СТОЛЕВИЧ О.И.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

ДВУХФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ В МОДЕЛИРОВАНИИ ПОВЕДЕНИЯ БЕТОНА ПОД НАГРУЗКОЙ

Цель. Разработка математической модели для получения достоверной зависимости напряжений от деформаций с проведением факторного анализа для выделения m существенных факторов или компонент из набора N исходных признаков, характеризующих изучаемое явление.

Методика. Построена двухфакторная модель по результатам кратковременных испытаний бетонных призм. Множество решений однородной системы позволило получить матрицу нагрузок с упрощенной структурой. Для реализации факторного анализа использовался метод вращения - «Varimax».

Научная новизна. Модель построенная на основе двух факторов - напряжений и призмной прочности бетона доказала адекватность в описании деформаций в диапазоне относительных напряжений от 0,4 до 0,6.

Практическая значимость. Настоящий метод удобен для реализации на компьютере и позволяет повернуть главные компоненты (факторы) на многомерный угол φ , что позволяет получить матрицу ортогонального решения $A = (a_{jk})$, с несложной структурой.

Ключевые слова: модель, метод вращения «Varimax», керамзитобетон, напряжения, деформации

Введение. Повышение эффективности применения железобетонных конструкций в строительстве связано с совершенствованием методов их расчетов, а также с разработкой оптимальных с точки зрения минимальных затрат энергии конструкций. В настоящее время недостаточно изученным, на наш взгляд, остается напряженно – деформированное состояние, трещинообразование и несущая способность железобетонных элементов.

Постановка задачи. Учет свойств материала при определении напряжений в бетоне может правильно отразить работу бетона, если в основу будет положен действительный закон, связывающий напряжения и деформации.

Различные функциональные зависимости для выражения закона связывающего σ и ε были предложены рядом исследователей.

В связи с развитием различных расчетных методов предлагается много различных уравнений для аналитического выражения диаграммы сжатия бетона $\sigma = f(\varepsilon)$ [1]. В подавляющем большинстве случаев, в этих уравнениях не стоит задача раскрыть физический смысл тех или иных отклонений от линейной зависимости, преследуется лишь цель описания кривой, в наибольшей степени, отвечающей экспериментам.

Результаты. Для обеспечения получения наиболее достоверной зависимости напряжений от деформаций при моделировании нами были выбраны четыре состава керамзитобетона с прочностью в пределах 8...40 МПа. Построение двухфакторной модели базировалось на результатах кратковременных испытаний бетонных призм.

На полученных графиках выделяли деформации быстро натекающей ползучести (ε_{cl}), неупругие мгновенные деформации ($\varepsilon_{b,pl}$) и деформации упругого последействия ($\varepsilon_{b,af}$). Полные относительные деформации (10^{-5}) диаграммы « $\sigma_b - \varepsilon_b$ » записали в следующем виде:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{b,el} + \varepsilon_{b,pl} + \varepsilon_{cl} \quad (1)$$

При этом деформации упругого последствия ($\varepsilon_{b,aft}$) являются частью упругих деформаций ($\varepsilon_{b,el}$).

Предлагаемая модель поведения бетона показана на рис. 1.

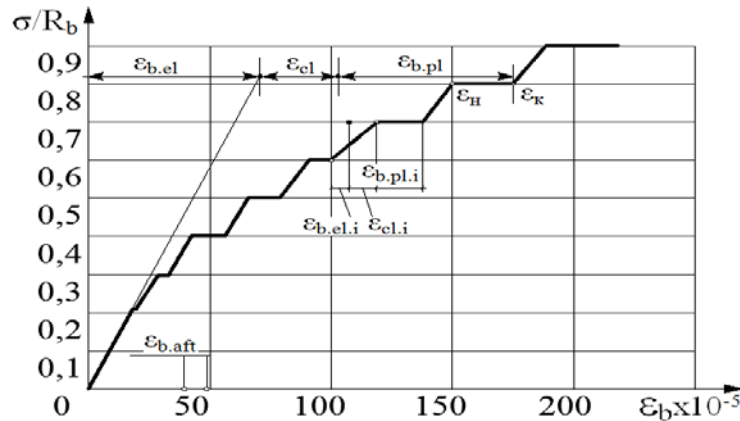


Рис. 1. Модель диаграммы работы бетона

Обработку результатов проводили в относительных единицах. За базовую призмную прочность R_{b0} при работе с экспериментальными данными принимали значение прочности четвертого состава - 30,2 МПа. Выбор кривых, описывающих экспериментальные данные проводили методом наименьших квадратов независимо по параметрам « $\varepsilon - \sigma/R_{bi}$ » и « $\varepsilon - R_{bi}/R_{b0}$ ». В результате выбирались только те зависимости, которые имели наибольший коэффициент корреляции с опытными данными (не менее 0,99). Окончательные зависимости в общем виде получили в форме произведения двух независимых параметров.

Деформации быстро натекающей ползучести записаны, в предлагаемой форме, в виде выражения:

$$\varepsilon_{cl} = 0,366 \cdot \left(1 + \frac{1,014}{\frac{R_{bi}}{R_{b0}}} + \frac{0,007}{\left(\frac{R_{bi}}{R_{b0}}\right)^2} \right) \cdot \left(1 + 124 \cdot \left(\frac{\sigma}{R_{bi}}\right)^3 \right) \cdot 10^{-5}. \quad (2)$$

Неупругие мгновенные деформации:

$$\varepsilon_{b,pl} = 2,593 \cdot \left(1 - \frac{1,040}{\frac{R_{bi}}{R_{b0}}} + \frac{0,369}{\left(\frac{R_{bi}}{R_{b0}}\right)^2} \right) \cdot \left(1 + 54,560 \cdot \left(\frac{\sigma}{R_{bi}}\right)^3 \right) \cdot 10^{-5}. \quad (3)$$

Упругие деформации:

$$\varepsilon_{b,el} = \frac{\sigma}{E_0} = \left(\frac{\sigma}{R_{bi}}\right) \cdot \left(\frac{0,552 + \frac{R_i}{R_{b0}}}{1130}\right). \quad (4)$$

Деформации упругого последствия:

$$\varepsilon_{b,aft} = 2,122 \cdot \left(1 - \frac{1,368}{\frac{R_{bi}}{R_{b0}}} + \frac{0,878}{\left(\frac{R_{bi}}{R_{b0}}\right)^3} \right) \cdot \left(1 + 15,833 \cdot \left(\frac{\sigma}{R_{b0}}\right)^3 \right) \cdot 10^{-5}. \quad (5)$$

Полученная модель адекватно описывала исходные данные при относительных напряжениях равных 0,4...0,6. В других диапазонах напряжений модель неадекватно описывала полученные данные. Для расширения диапазона работы модели были проведены дополнительные статистические исследования методом факторного анализа.

Главной задачей проводимого нами факторного анализа – объяснение корреляции

признаков с помощью некоррелированных факторов. С этой целью выделялся набор факторов, число которых меньше числа исходных признаков ($m < N$), тем самым уменьшая размерность исследуемого пространства [3].

При проведенном нами факторном анализе использовались данные, полученные в наших исследованиях, а также результаты испытаний, приведенные в других работах.

Целью проведенного факторного анализа было выделение m существенных факторов или компонент из набора N исходных признаков, характеризующих изучаемое явление. Исходные признаки заменялись меньшим числом ($m < N$) стандартизированных ортогональных факторов или компонент.

Общий вид модели факторного анализа представлял собой систему уравнений [2]:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= W_{11}F_1 + W_{12}F_2 + \dots + W_{1m}F_m + [v_1U_1] \\ Z_2 &= W_{21}F_1 + W_{22}F_2 + \dots + W_{2m}F_m + [v_2U_2] \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Z_N &= W_{N1}F_1 + W_{N2}F_2 + \dots + W_{Nm}F_m + [v_NU_N] \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где Z_j - стандартизированный исходный j -признак; F_k - общий стандартизированный k -фактор; W_{jk} - факторная нагрузка на j -признак k -фактора; U_j - характерный фактор для j -признака; v_j - нагрузка при характерном факторе на j -признак; m - число факторов (или главных компонент), $m < N$.

В основу факторного анализа положено предположение о том, что исходные признаки, описывающие изучаемое явление, обладают общими чертами, роль которых выполняют общие факторы или латентные переменные [3]. Выделялись те факторы, которые объясняли значительную часть (70 – 80%) дисперсии какого-либо j -признака. Это обстоятельство уже использовалось для идентификации, а также, как управляющее воздействие на j -признак объекта, исходя из ортогональности выделенных факторов или главных его компонент.

В геометрической интерпретации основных понятий факторного анализа, признаки могут быть рассмотрены как векторы. Факторы или компоненты F_k могут быть интерпретированы, исходя из их определения как системы линейных комбинаций ортогональных векторов. Факторы F_k стандартизированы и их дисперсии равны единице, а углы между ними составляют 90° . Следовательно, оси прямоугольной системы координат можно интерпретировать как факторы. Факторные нагрузки W_{jk} интерпретировались как проекции, вектор-признаков Z_j на оси-факторы F_k . Отсюда следует, что факторная нагрузка k -фактора на j -признак - это не что иное, как коэффициент корреляции между j -признаком и k -фактором, что можно рассматривать как косинус угла между ними (рис.2) или как проекцию j -признака в нормированном масштабе на k -факторную ось.

При рассмотрении системы $Z=W \cdot F$, мы сталкиваемся с взаимным положением двух наборов векторов. Один набор это конфигурация вектор-признаков, который однозначно определяем матрицами корреляций R или R^{red} . Второй набор - это вектор факторы, интерпретируемые как оси координат. В систему осей-факторов помещали конфигурацию вектор-признаков (рис.3). При проецировании нормированных вектор-признаков на оси-факторы, получали проекции представляющие факторные нагрузки.

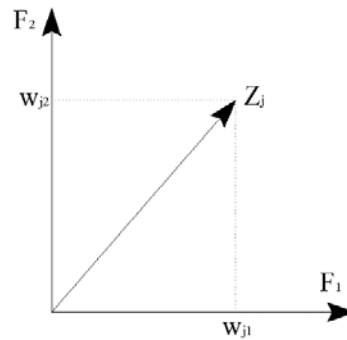


Рис. 2. Интерпретирование факторных нагрузок W_{j1} и W_{j2} , как проекций Z_j признака на факторные оси F_1 и F_2

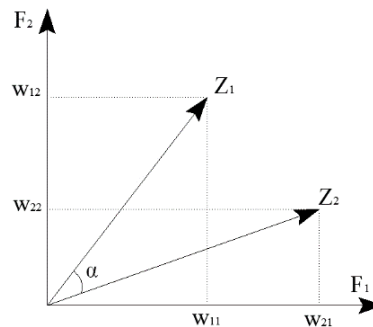


Рис. 3. Интерпретирование заданной конфигурации вектор-признаков Z_1 и Z_2 , найденных проекций W_{jk} ($j, k = 1, 2$) для этих признаков на факторные оси F_1 и F_2

В ходе проведенных операций по определению матрицы нагрузок $W=(W_{jk})$ нами фактически заменялись вектор-признаки на ортогональные вектор-факторы число которых меньше ($m < N$) числа признаков, т.е. использовались те F_j для которых величины собственных чисел $(\lambda_k) \gg 0$. Это можно объяснить тем, что многие признаки значительно коррелированы между собой и поэтому, содержат одинаковую информацию об изучаемых явлениях. В определении линейной комбинации факторов не идет прямая замена Z_1 на F_1 , а Z_2 на F_2 и т.п., в итоге заменяется одна конфигурация коррелированных между собой N признаков на меньшее число m некоррелированных факторов. При этом пытались отыскать "эквивалент" в системе "признаки-факторы", т.е. какие признаки эффективнее "объясняют", например фактор F_1 , а какие фактор F_2 и т.д.

В приведенных здесь матричных уравнениях отсутствовало однозначное решение W , что представляло главную трудность, которая возникала в анализе. В N -мерном пространстве система отсчета (система факторных осей) не определена однозначно (это следует из неопределенного решения системы). В свою очередь это в значительной мере влияло на значения факторных нагрузок, поскольку проекции фактор-признаков на оси-факторы зависело от положения последних. В результате, при наличии однозначности конфигурации исходных признаков, не получилось однозначного решения по факторным нагрузкам. На рис. 4 показана конфигурация двух вектор-признаков при двух различных положениях системы отсчета, включающей две факторные оси.

В результате, множество решений однородной системы приводило к возможности получить матрицу нагрузок с упрощенной структурой.

В дальнейшем следовало решить следующую проблему: какими соображениями следует руководствоваться при выборе общих факторов из бесконечного числа таких систем, лежащих в одном, и том же линейном подпространстве, и какими вычислительными

методами следует осуществлять этот выбор.

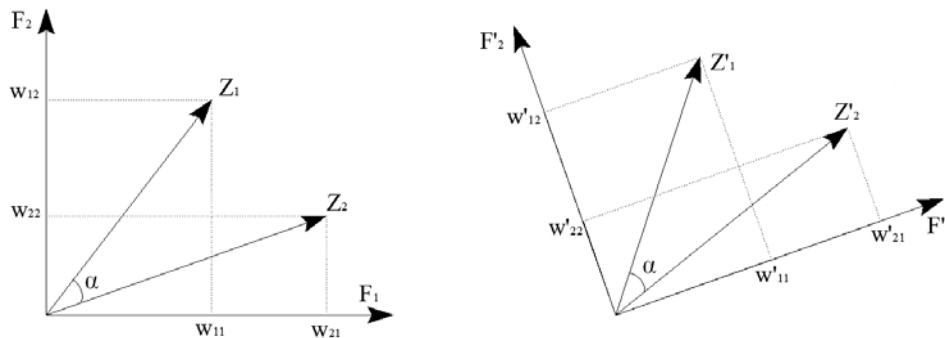


Рис. 4. Два различных решения задачи факторного анализа

Из фундаментального решения W , полученного из матрицы корреляций (или R^{red}), можем получить так называемое "повернутое" решение с матрицей A :

$$A = W \cdot L^T = L \cdot W, \quad (6)$$

где L - матрица N -порядка произвольного ортогонального преобразования, в результате которого выполняется условие $W^T \cdot W = R$ и, следовательно, $A^T \cdot A = R$.

Для реализации факторного анализа использовался метод вращения - «Varimax» и систему STATISTIKA в среде Windows, с модулем этой системы Factor Analysis.. Настоящий метод удобен для реализации на компьютере и позволяет повернуть главные компоненты (факторы) на многомерный угол φ , что позволяет получить матрицу ортогонального решения $A = (a_{jk})$, с несложной структурой.

Выводы.

1. Полученная модель адекватно описывает исходные данные при относительных напряжениях равных 0,4...0,6.
2. В результате проводимого нами факторного анализа получено объяснение корреляции признаков с помощью некоррелированных факторов.
3. Проведенный факторный анализ выделил m существенных факторов или компонент из набора N исходных признаков, характеризующих изучаемое явление. В дальнейшем исходные признаки заменялись меньшим числом ($m < N$) стандартизированных ортогональных факторов или компонент.
4. Множество решений однородной системы привело к возможности получить матрицу нагрузок с упрощенной структурой.

Список использованных источников

1. Байков В.Н., Горбатов С.В., Димитров З.А. Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей. // Изв. вузов. Сер.: Стр-во и архитектура, 1977.- №6. С. 15-18.
2. Благуш П. Факторный анализ с обобщениями. М.: Финансы и статистика, 1989.-248 с.
3. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятности и математической статистики. М.: Наука, 1969. 512 с.

ДВОФАКТОРНА МОДЕЛЬ У МОДЕЛЮВАННІ ПОВЕДІНКИ БЕТОНА ПІД НАВАНТАЖЕННЯМ

КОСТЮК А.І., СТОЛЕВИЧ І.А., СТОЛЕВИЧ О.І.

Одеська державна академія будівництва та архітектури

Мета. Розробка математичної моделі для отримання достовірної залежності напружень від деформацій з проведенням факторного аналізу для виділення m істотних факторів або компонент з набору N вихідних ознак, що характеризують досліджуване явище.

Методика. Побудована двофакторна модель за результатами короточасних випробувань бетонних призм. Безліч рішень однорідної системи дозволило отримати матрицю навантажень зі спрощеною структурою. Для реалізації факторного аналізу використовувався метод обертання - «Varimax».

Наукова новизна. Модель побудована на основі двох факторів - напружень і призмової міцності бетону довела адекватність в описі деформацій в діапазоні відносних напружень від 0,4 до 0,6.

Практична значимість. Даний метод зручний для реалізації на комп'ютері і дозволяє повернути головні компоненти (фактори) на багатовимірний кут φ , що дозволяє отримати матрицю ортогонального рішення $A = (a_{jk})$, з нескладною структурою.

Ключові слова: модель, метод обертання «Varimax», керамзитобетон, напруження, деформації.

TWO-FACTOR MODEL IN MODELING THE BEHAVIOR OF CONCRETE UNDER LOAD

KOSTUK A.I., STOLEVYCH I.A., STOLEVYCH O.I.

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Goal. Development of mathematical models to obtain reliable dependence of stress from deformation with carrying out factor analysis to extract m significant factors or component of a set of N original features, which characterizing studied phenomenon.

Methods. Two-factor model was built based on the results of short-term tests of concrete prisms. Many homogeneous system making it possible to obtain a matrix of loads with a simplified structure. Rotation method - «Varimax», was used for the implementation of the factor analysis.

Scientific novelty. The model was built based on the two factors - the stress and prism strength of concrete proved adequate in describing deformations in the relative stress range from 0.4 to 0.6.

Practical significance. This method is suitable for implementation on a computer and allows to rotate the principal components (factors) to the multidimensional angle φ , which allows to get an orthogonal solutions matrix $A = (a_{jk})$, with a simple structure.

Keywords: model, rotation method «Varimax», expanded clay concrete, stress, deformation.