

**Новосад Б. П., Блохін О. Л.**

*Київський національний університет технологій та дизайну*

### **ЦИФРОВИЙ ФІЛЬТР З РІЗНИЦІ ЕКСПОНЕНЦІЙНИХ КОВЗНИХ СЕРЕДНІХ**

**Анотація.** У роботі розглядається цифровий фільтр, побудований із різниці двох експоненційних ковзних середніх із різними параметрами. Такі фільтри широко використовують у теорії випадкових процесів і, зокрема, при побудові індикаторів технічного аналізу біржових і валютних котирувань. Різниця двох експоненційних середніх представлена у вигляді добутку трьох співмножників: два з них – вихідні середні, а третій – диференціальний фільтр скінчених різниць. Описано спектральні властивості такого фільтра. Знайдено формулу для обчислення провідної частоти фільтра – частоти, при якій відбувається максимальне посилення вхідного сигналу.

**Ключові слова:** експонентні ковзні середні; спектральний аналіз випадкових процесів; індикатори технічного аналізу; цифрові фільтри.

**Novosad B., Blokhin O.**

*Kyiv National University of Technologies and Design*

### **DIGITAL FILTER FROM DIFFERENCES EXPONENTIAL MOVING AVERAGES**

**Abstract.** The paper considers a digital filter built from the difference of two exponential moving averages with different parameters. Such filters are widely used in the theory of random processes and, in particular, in the construction of indicators for the technical analysis of exchange and currency quotes. The difference of two exponential moving averages is represented as a product of three factors: two of them are the original moving averages, and the third is a differential filter of finite difference. The spectral properties of such a filter are described. A formula is found for calculating the leading frequency of the filter – the frequency at which the maximum amplification occurs.

**Keywords:** exponential moving averages; spectral analysis of random processes; indicators of technical analysis; digital filters.

**Вступ.** У економіці, техніці, фінансах під час аналізу випадкових процесів (часових рядів) широко використовуються ковзні середні [1–3, 5]. З великої кількості таких середніх найбільшу популярність має експоненційна ковзна середня, оскільки вона надає найбільшого пріоритету останнім даним, при цьому беручи до уваги всі дані часового ряду. До того ж її обчислення відбувається за надзвичайно простими формулами, у яких бере участь лише останнє значення часового ряду та попереднє значення середньої. Порівняння двох ковзних середніх із різними параметрами (з різною шириною вікна) дає інформацію про швидкість зміни випадкового процесу. Різні види ковзних середніх та їх різниць у різних комбінаціях часто використовуються при побудові індикаторів технічного аналізу [4]. Індикатори технічного аналізу можна розглядати як цифрові фільтри, які перетворюють вхідний часовий ряд (вхідний сигнал) у вихідний часовий ряд (вихідний сигнал) з новими характеристиками, в яких посилені або ослаблені деякі характеристики вхідного ряду. При цьому цікавить дослідження того, як перетворюються спектральні характеристики вхідного часового ряду. Залежність спектральних характеристик вхідного та вихідного сигналу описується спектральними властивостями фільтра. Тому виникає завдання опису спектральних характеристик фільтрів, побудованих з різних комбінацій ковзних середніх та їх різниць.

**Постановка завдання.** Виходячи з вищенаведеного, метою дослідження є аналіз спектральних характеристик цифрового фільтра, побудованого з різниці двох експоненційних ковзних середніх, опис частот, які посилює або послаблює такий фільтр. Одним із найвідоміших індикаторів технічного аналізу, в якому використовуються такі

різниці експоненційних ковзних середніх, є індикатор сходження-розбіжність ковзних середніх (MACD – convergence-divergence of moving averages). Дослідження його спектральних характеристик було розпочато у роботах [6, 7].

**Результати досліджень.** Експоненційна ковзна середня визначається таким різницеvim рівнянням [3, 5]

$$x(n) \xrightarrow{EMA} y(n)$$

$$y(n) = \alpha x(n) + \beta y(n-1) \quad \text{або} \quad y(n) - \beta y(n-1) = \alpha x(n)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – параметри усереднення:  $\alpha + \beta = 1$ ,  $0 < \alpha, \beta < 1$ . Параметр  $\alpha$  пов'язаний із шириною вікна фільтра  $N$  (число періодів за якими проводиться усереднення) формулою

$$\alpha = \frac{2}{N+1}, \quad \text{при цьому} \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{N-1}{N+1}$$

Виконаємо Z-перетворення:

$$x(n) \longleftrightarrow X(z)$$

$$y(n) \longleftrightarrow Y(z)$$

$$Y(z)(1 - \beta z^{-1}) = \alpha X(z) \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

де  $H(z)$  – Z-перетворення передавальної функції системи.

Звідси випливає  $H(z) = \frac{\alpha}{1 - \beta z^{-1}}$ , область збіжності  $|z| > \beta < 1$ . Ця функція збіжна

на одиничному колі в комплексній площині. При підстановці  $z = \exp(i\omega)$  отримуємо перетворення Фур'є передавальної функції – функцію спектральної щільності системи [2].

$$H(\omega) = \frac{\alpha}{1 - \beta \exp(-i\omega)}$$

Оскільки ЕМА є лінійною системою, то різниці ЕМА відповідає різниця – Z-перетворень

$$EMA_N - EMA_M \xrightarrow{z} H_N(z) - H_M(z)$$

Ми будемо вважати, що  $M > N$ . Таким чином різниці двох експоненційних ковзних середніх відповідає спектральна функція

$$H(\omega) = \left( \frac{\alpha}{1 - \beta \exp(-i\omega)} - \frac{\gamma}{1 - \delta \exp(-i\omega)} \right)$$

$$\alpha = \frac{2}{N+1}; \beta = \frac{N-1}{N+1}; \gamma = \frac{2}{M+1}; \delta = \frac{M-1}{M+1};$$

Шляхом нескладних перетворень можна отримати

$$\frac{\alpha}{1 - \beta z^{-1}} - \frac{\gamma}{1 - \delta z^{-1}} = (\alpha - \gamma) \frac{1 - z^{-1}}{(1 - \beta z^{-1})(1 - \delta z^{-1})} = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha \gamma} (1 - z^{-1}) \frac{\alpha}{1 - \beta z^{-1}} \frac{\gamma}{1 - \delta z^{-1}}$$

Це показує, що  $Z$ -перетворення різниці  $EMA_N - EMA_M$  складається з постійного множника  $\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\gamma}$ ,  $Z$ -перетворень  $EMA_N$  і  $EMA_M$  та третього множника  $(1 - z^{-1})$ . Цей третій множник є  $Z$ -перетворенням скінченої різниці  $\Delta = 1 - L$ , де  $L$  – лаговий оператор [8].

$$\Delta(x(n)) = x(n) - x(n-1)$$

Таким чином, різницю двох експоненційних ковзних середніх можна представити у вигляді трьох послідовно виконуваних операторів, оскільки його  $Z$ -перетворення представлено у вигляді добутку  $Z$ -перетворень трьох множників – двох  $EMA$  і одного  $\Delta$ .

$$EMA_N - EMA_M \xrightarrow{z} \frac{M - N}{2} H_\Delta(z) H_N(z) H_M(z)$$

При цьому, оскільки для ЛТІ-систем операція згортки, що відповідає множенню  $Z$ -перетворень, є комутативною, все одно, в якому порядку виконуються ці три оператори.

Спектральна функція різниці двох експоненційних ковзних середніх може бути представлена у вигляді

$$H(\omega) = \frac{M - N}{2} \left( \frac{\alpha}{1 - \beta \exp(-i\omega)} \right) \left( \frac{\gamma}{1 - \delta \exp(-i\omega)} \right) (1 - \exp(-i\omega))$$

Така форма подання зручна для аналізу розподілу спектральної щільності амплітуди та фази. Амплітуда буде добуток амплітуд множників, а фаза – сума відповідних фаз.

Змістовний зміст такого представлення спектральної функції полягає в наступному: різниця двох експоненційних ковзних середніх еквівалентна подвійному послідовному згладжуванню вхідного сигналу за допомогою експоненціальних ковзних середніх з різною шириною вікон і взяття скінченої різниці. При цьому подвійне згладжування дозволяє позбавитися випадкових високочастотних шумів, а оператор  $\Delta$  прибирає лінійний тренд або знижує порядок поліноміального тренду.

Для обчислення амплітудного спектра перші множники зручно подати у вигляді

$$|H_N(\omega)| = \left| \frac{\alpha}{1 - \beta \exp(-i\omega)} \right| = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\beta \cos \omega + \beta^2}}$$

А для останнього множника у вигляді [8, 9]

$$H_\Delta(\omega) = 1 - e^{-i\omega} = e^{-i\omega/2} (e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}) = 2ie^{-i\omega/2} \sin(\omega/2) \quad |H_\Delta(\omega)| = 2|\sin(\omega/2)|$$

Графік амплітуди спектральної щільності має вигляд, зображений на рис. 1 (ми обрали параметри, що найбільш частіше використовуються  $N = 12, M = 26$ ).

Аналізуючи цей графік, можна зробити висновок, що фільтр з різниці двох експоненціальних ковзних середніх є фільтром, який послаблює високі частоти, видаляє лінійну компоненту сигналу (видаляє лінійний тренд) разом з деякими наднизькими частотами і посилює складові частоти сигналу, які зосереджені біля точки максимуму спектральної щільності на графіці – провідна частота  $\omega_0$ .

Наша мета – знайти цю ведучу частоту  $\omega_0$  фільтру, тобто точку максимуму функції амплітудної спектральної щільності.

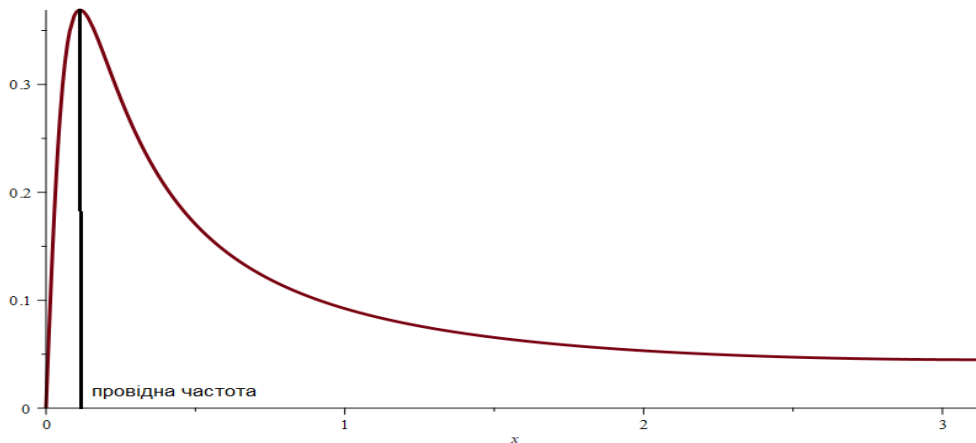


Рис. 1. Графік функції амплітудної спектральної щільності  $EMA_{26} - EMA_{12}$

Будемо шукати точку максимуму функції

$$F(\omega) = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 2\beta \cos \omega + \beta^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta \cos \omega + \delta^2}} |\sin(\omega/2)| \right)^2,$$

яка відрізняється від нашої щільності сталім множником.

Будемо враховувати, що

$$\begin{aligned} |H_N(\omega)|^2 &= \left| \frac{\alpha}{1 - \beta \exp(-i\omega)} \right|^2 = \frac{\alpha^2}{(1 - \beta \cos \omega)^2 + \beta^2 \sin^2 \omega} = \\ &= \frac{\alpha^2}{(1 + \beta^2) - 2\beta \cos \omega} = \frac{2^2 / (N+1)^2}{1 + \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 - 2\frac{N-1}{N+1} \cos \omega} = \frac{1}{1 + n \sin^2 \frac{\omega}{2}} \end{aligned}$$

та

$$|H_M(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\omega}{2}}$$

де позначено  $n = N^2 - 1$ ,  $m = M^2 - 1$ .

Якщо позначити  $x = \sin^2 \frac{\omega}{2}$ , то тоді маємо:

$$F(x) = \frac{1}{1 + nx} \cdot \frac{1}{1 + mx}$$

Прологарифмуємо цю функцію та візьмемо похідну. Корень похідної й буде шукана точка максимуму.

$$(\ln F(x))' = \frac{1 - nm x^2}{x(1 + nx)(1 + mx)},$$

тобто  $x_0 = \sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{nm}}$ . Звідси  $\omega_0 = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{nm}}\right)$ .

**Висновки.** Цифровий фільтр, побудований з різниці двох експоненційних ковзних середніх з різними параметрами усереднення  $EMA_N - EMA_M$ , є фільтром високих частот, який додатково видаляє лінійний тренд і має максимальне посилення в околі провідної частоти, яку можна обчислити за формулою

$\omega_0 = 2 \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt[4]{(N^2 - 1)(M^2 - 1)}}$ . Для достатньо великих значень  $N$ ,  $M$  можна

використовувати наближену формулу  $\omega_0 \approx 2 \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{NM}}$ . Користуючись мовою

періодів замість частот, маємо формулу для провідного періоду  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{\arcsin \frac{1}{\sqrt[4]{nm}}}$ ,

або відповідне наближення  $T_0 \approx \pi \sqrt{NM}$ .

#### Список використаної літератури

1. Hamilton J. D. Time series analysis. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1994. 799 p.
2. Koopmans L. H. The spectral analysis of time series. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1995. 366 p.
3. Oppenheim A. V., Schaffer R. W. Discrete-Time signal processing. Pearson Education, Limited, 2010. 1137 p.
4. Ehlers J. F. Cybernetic Analysis for Stocks and Futures: Cutting-Edge DSP Technology to Improve Your Trading. Wiley & Sons, Incorporated, John, 2011. 256 p.
5. Diniz P. S. R. Digital signal processing: System analysis and design. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2010. 912 c.
6. Blokhin O., Zhilali Z. Spectral properties of the MACD indicator. *Innovations technologies in science and practice. Proceedings of the VI International Scientific and Practical Conference*. Haifa, Israel. 2022. Pp. 464–473.
7. Блохін О. Л., Жлалі Ж. Т. Спектральні властивості індикатора MACD. *Матеріали ІІ Всеукраїнської конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених "Інноватика в освіті, науці та бізнесі: виклики та можливості"* (Київ, 18 листопада 2021 р.). К.: КНУТД, 2021. Том 1, С. 201–206.
8. Блохін О. Л., Бобовський В. Ю. Спектральні властивості скінчених різниць дискретного випадкового процесу. *Матеріали І Всеукраїнської конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених "Інноватика в освіті, науці та бізнесі: виклики та можливості"*. К.: КНУТД, 2020. С. 188–193.
9. Блохін А. Л., Годз В. Р. Корелограммы разностей случайного процесса. *П'ята міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволююючі системи"* (19–21 травня 2020 р.): збірник праць. За ред. В. О. Дубка, В. Б. Кисельова. К.: ФОП Маслакові, 2020. С. 350–352.