

УДК 677.055

ДВОРЖАК В.М., ОРЛОВСЬКИЙ Б.В.

Київський національний університет технологій та дизайну

**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ МАСА-ІНЕРЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ РУХОМИХ ТРИПОВОДКОВИХ ЛАНОК МЕХАНІЗМІВ ТЕХНОЛОГІЧНИХ МАШИН**

***Мета.** Вдосконалення методів проектування типових механізмів машин галузі із застосуванням прикладних CAD-програм.*

***Методика.** Використаний експериментальний метод дослідження типових механізмів машин галузі.*

***Результати.** Отриманий алгоритм експериментального дослідження моментів інерції та положень центрів мас ланок механізмів із застосуванням прикладної програми MathCAD*

***Наукова новизна.** Розвиток експериментальних методів автоматизованого проектування типових механізмів машин із застосуванням комп'ютера.*

***Практична значимість** роботи полягає у використанні одержаних результатів досліджень при проектуванні цільових типових механізмів машин галузі.*

***Ключові слова:** момент інерції, центр мас, рухома ланка.*

**Вступ.** Визначення маса-інерційних параметрів рухомих ланок механізмів, таких як моменти інерції приведені до осей коливання (обертання) або до осей, що проходять через центри мас ланок, та положення цих центрів мас, може здійснюватися двома способами – аналітичним, у тому числі з використанням 3D-моделей рухомих ланок у прикладних CAD-програмах, та експериментальним [2].

Переважає більшість рухомих ланок механізмів технологічних машин має досить складну конструкцію, як наприклад, в механізмах з групами Асура 3 і 4 класів [6, 4]. Використання аналітичних методів для визначення маса-інерційних параметрів таких ланок вимагає проведення вимірювань для визначення розмірів окремих простих тіл та значної кількості аналітичних розрахунків [3]. Тому завдання експерименту є доволі актуальним при проектуванні технологічних машин з важільними механізмами зі змінною передаточною функцію.

Для визначення моментів інерції тіл складної геометричної форми широко використовуються експериментальні методи коливань, як наприклад, метод згасаючих коливань [2], який відрізняється простотою реалізації та водночас хорошою точністю результатів. Тому саме цей метод покладений в основу визначення моментів інерції та положень центрів мас рухомих ланок технологічних машин.

**Постановка завдання.** Завданням цього дослідження є створення певного алгоритму для експериментального визначення моментів інерції ланок та положень їхніх центрів мас та розробка математичних моделей для його реалізації з використанням прикладної комп'ютерної програми MathCAD.

**Основний матеріал.** Експериментальна установка для визначення осьового моменту інерції та положення центра мас рухомої ланки складається з коливної платформи з противагою  $I$  (рис. 1), яка закріплюється на вертикальному валові, що встановлюється в підшипниках кочення, які в свою чергу кріпляться до корпусу експериментальної установки (на рис. 1 корпус не показаний). Платформа  $I$  з протилежної сторони з'єднується із пружним елементом 2, який з'єднується з корпусом експериментальної установки. Рухома ланка 3, що досліджується, встановлюється на коливну платформу  $I$ . Позначимо осі правої системи координат (ПСК) так, щоб вісь  $Z$  була віссю коливання платформи  $I$ . Для визначення моменту інерції рухомої ланки відносно осі  $Z_S$ , яка паралельна до вертикальної осі  $Z$  та проходить через центр мас рухомої ланки, слід розмістити рухому ланку так, щоб площина її руху лежала у площині коливання платформи, тобто у площині  $XU$  ПСК.

Якщо вивести цю механічну систему з рівноваги, завдаючи їй малої амплітуди коливань, то платформа разом з ланкою здійснюватимуть коливання навколо осі  $Z$ , які, нехтуючи тертям, можна описати диференціальним рівнянням вільних коливань [7]:

$$I^* \cdot \ddot{\varphi}_i + c_{np} \cdot \varphi_i = 0; \quad (1)$$

де  $I^*$  – приведений до осі  $Z$  коливання платформи момент інерції механічної системи;

$c_{np}$  – приведена жорсткість пружного елемента;

$\varphi$  – кут відхилення платформи від положення рівноваги;

$\ddot{\varphi}$  – кутове прискорення платформи;

$i$  – дискретна змінна, яка визначає номер досліду,  $i = 1, 2..n$  ( $n$  – кількість дослідів).

Використовуючи теорему Гюйгенса-Штейнера, визначимо приведений момент інерції механічної системи  $I^*$  згідно з рис. 1:

$$I^* = I_1 + I_2 + m_2 \cdot [(a+x)^2 + (b+y)^2]; \quad (2)$$

де  $I_1$  – осьовий момент інерції коливної платформи відносно осі коливання  $Z$ ;

$I_2$  – осьовий момент інерції рухомої ланки відносно осі, що проходить через її центр мас  $Z_S$ ;

$m_2$  – маса рухомої ланки;

$a$  та  $b$  – відстані від відповідних осей ПСК до рухомої ланки, що визначають положення останньої на коливній платформі (знак параметру  $b$  згідно з рис. 1 залежить від розташування рухомої ланки на платформі; для прикладу, що розглядається значення  $b$  від'ємне);

$x$  та  $y$  – відстані від відповідних площин рухомої ланки до її центра мас.

Приведену жорсткість  $c_{np}$  у виразі (1) можна визначити за такою формулою:

$$c_{np} = c \cdot L^2; \quad (3)$$

де  $c_{np}$  – приведена жорсткість пружини платформи, Н·м;

$c$  – лінійна жорсткість пружини платформи, Н/м;

$L$  – відстань від осі коливання платформи  $Z$  до місця закріплення пружини.

Експеримент пов'язаний з визначенням періоду коливань механічної системи, який визначатимемо з виразу частоти вільних коливань  $p$ :

$$p = \sqrt{\frac{c_{np}}{I^*}} = \frac{2 \cdot \pi}{T}; \quad (4)$$

де  $T$  – період коливань механічної системи.

Звідки:

$$I^* = \frac{c_{np}}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2. \quad (5)$$

Момент інерції самої платформи  $I_1$ , що входить до рівняння (2), визначимо з виразу:

$$I_1 = \frac{c_{np}}{4 \cdot \pi^2} \cdot T_1^2, \quad (6)$$

де  $T_1$  – період коливань самої платформи без рухомої ланки.

Користуючись рекомендаціями [1], жорсткість  $c$  слід обирати таким чином, щоб період коливань порожньої платформи приблизно дорівнював  $T_1 \approx 1$  сек.

Для визначення моменту інерції рухомої ланки та положення її центра мас, експеримент проводитимемо для трьох положень рухомої ланки на платформі.

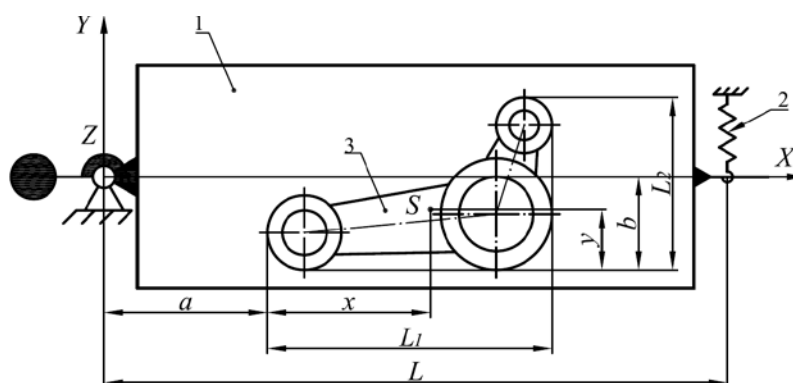
Перше положення рухомої ланки зображено на розрахунковій схемі на рис. 1.

Для першого положення запишемо рівняння, об'єднавши вирази (2) та (5):

$$I_1 + I_2 + m_2 \cdot [(a + x)^2 + (b + y)^2] = \frac{c_{np}}{4 \cdot \pi^2} \cdot T_{\Sigma 1}^2, \quad (7)$$

де  $T_{\Sigma 1}$  – період коливань платформи із встановленою на ній рухомою ланкою, виміряний на першому етапі експерименту.

Друге положення рухомої ланки отримаємо, повернувши її навколо осі  $Y$  на  $180^\circ$  (рис. 2).

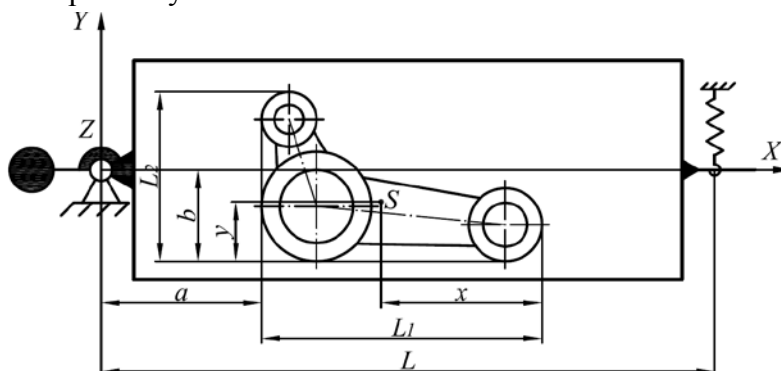


**Рис. 1.** Розрахункова схема для першого етапу експерименту з визначення моменту інерції та положення центра мас рухомої ланки

Для другого положення запишемо рівняння, об'єднавши вирази (2) і (5) та замінивши співмножник при  $m_2$  у виразі (2) на квадрат відстані між осями  $Z$  та  $Z_S$  відповідно до рис. 2:

$$I_1 + I_2 + m_2 \cdot [(a + (L_1 - x))^2 + (b + y)^2] = \frac{c_{np}}{4 \cdot \pi^2} \cdot T_{\Sigma 2}^2, \quad (8)$$

де  $T_{\Sigma 2}$  – період коливань платформи із встановленою на ній рухомою ланкою, виміряний на другому етапі експерименту.



**Рис. 2.** Розрахункова схема для другого етапу експерименту з визначення моменту інерції та положення центра мас рухомої ланки

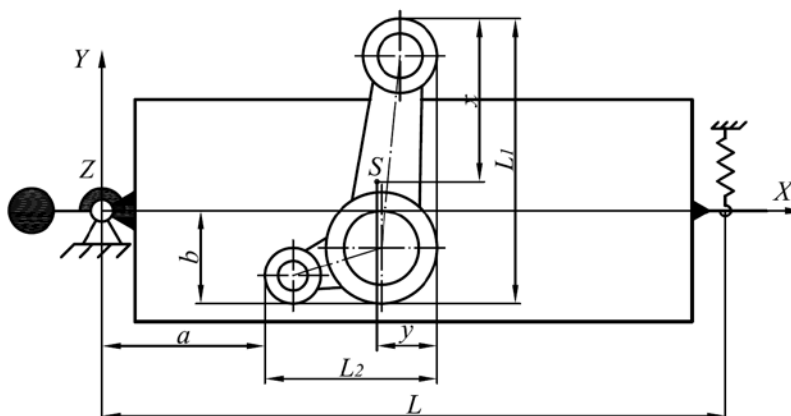
Третє положення рухомої ланки отримаємо, повернувши її з другого положення навколо осі Z на  $90^\circ$  (рис. 3).

Аналогічно до рівняння (8) запишемо рівняння для третього етапу експерименту відповідно до рис. 3:

$$I_1 + I_2 + m_2 \cdot [(a + (L_2 - y))^2 + (b + (L_1 - x))^2] = \frac{c_{np}}{4 \cdot \pi^2} \cdot T_{\Sigma 3}^2, \quad (9)$$

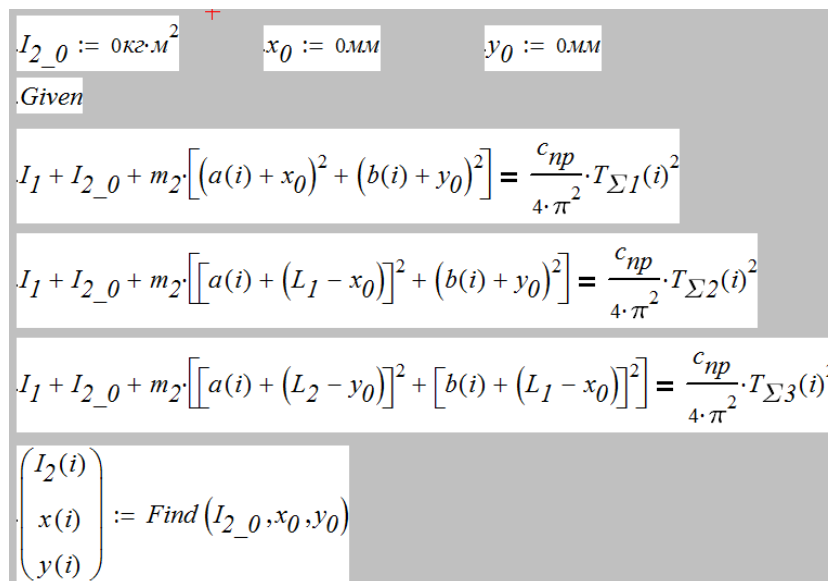
де  $T_{\Sigma 3}$  – період коливань платформи із встановленою на ній рухомою ланкою, виміряний на третьому етапі експерименту.

Таким чином, об'єднавши рівняння (7), (8) та (9), отримаємо систему рівнянь, з якої визначимо невідомі параметри  $I_2$ ,  $x$  та  $y$ .



**Рис. 3.** Розрахункова схема для третього етапу експерименту з визначення моменту інерції та положення центра мас рухомої ланки

Для розв'язку системи рівнянь скористаємося програмою MathCAD із застосуванням обчислювального блоку Given-Find, який представлений на рис. 4. Відомо [5], що обчислювальний блок Given-Find вимагає завдання початкових значень параметрам  $I_2$ ,  $x$  та  $y$ , а саме введення  $I_{2_0}$ ,  $x_0$  та  $y_0$ , в околиці яких здійснюватиметься пошук розв'язку системи рівнянь.



**Рис. 4.** Розрахункова область вікна документа MathCAD для обробки результатів експерименту з визначення моменту інерції та положення центра мас рухомої ланки

Експеримент проводиться при трьох положеннях рухомої ланки на платформі згідно з рис. 1, рис. 2 та рис. 3 та різних значеннях відстаней  $a(i)$  та  $b(i)$  в кожному положенні для  $n$  дослідів, де дискретна змінна  $i = 1, 2..n$ . Відповідно цьому, визначаються значення періодів коливань механічної системи  $T_{\Sigma 1}(i)$ ,  $T_{\Sigma 2}(i)$  та  $T_{\Sigma 3}(i)$ . Результати експерименту представляються у вигляді таблиці:

**Таблиця 1.** Результати експерименту

| $i$ | $a(i)$ | $b(i)$ | $T_{\Sigma 1}(i)$ | $T_{\Sigma 2}(i)$ | $T_{\Sigma 3}(i)$ |
|-----|--------|--------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1   | $a(1)$ | $b(1)$ | $T_{\Sigma 1}(1)$ | $T_{\Sigma 2}(1)$ | $T_{\Sigma 3}(1)$ |
| 2   | $a(2)$ | $b(2)$ | $T_{\Sigma 1}(2)$ | $T_{\Sigma 2}(2)$ | $T_{\Sigma 3}(2)$ |
| $n$ | $a(n)$ | $b(n)$ | $T_{\Sigma 1}(n)$ | $T_{\Sigma 2}(n)$ | $T_{\Sigma 3}(n)$ |

У результаті обчислень блоком Given-Find отримаємо матрицю  $3 \times 1$  параметрів  $I_2(i)$ ,  $x(i)$  та  $y(i)$  при різних значеннях дискретної змінної  $i$  для  $n$  дослідів.

Визначаємо середні значення моменту інерції рухомої ланки та координати її центра мас згідно з рис. 5:

$$I_{2\text{сеп}} := \frac{\sum_{i=1}^n (I_2(i))}{n} \quad x_{\text{сеп}} := \frac{\sum_{i=1}^n (x(i))}{n} \quad y_{\text{сеп}} := \frac{\sum_{i=1}^n (y(i))}{n}$$

**Рис. 5.** Розрахункова область вікна документа MathCAD для визначення середніх значень моменту інерції та положення центра мас рухомої ланки

Таким чином, визначені параметри  $I_{2\text{сеп}}$ ,  $x_{\text{сеп}}$  та  $y_{\text{сеп}}$  є отриманими результатами експериментальних досліджень.

**Висновки.** Розглянутий метод експериментального визначення осевого моменту інерції та положення центра мас рухомих ланок дозволяє забезпечити автоматизацію проектування типових механізмів машин галузі з використанням сучасної прикладної комп'ютерної програми MathCAD. Результати дослідження можуть бути впроваджені у навчальну дисципліну «Основи розрахунку та конструювання типових машин» Київського національного університету технологій та дизайну.

#### Список використаних джерел

1. Бертяев В. Д. Теоретическая механика на базе MathCAD : практикум / В. Д. Бертяев – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 752 с. – ISBN 5-94157-625-0.
2. Гернет М. М. Определение моментов инерции / М. М. Гернет, В. Ф. Ратобыльский – М. : Машиностроение, 1969. – 248 с.
3. Дорошенко І. В. Визначення маса-інерційних параметрів рухомих ланок міні-основов'язальних машин аналітичним методом [Електронний ресурс] / І. В. Дорошенко, Б. В. Орловський, В. М. Дворжак // Технології та дизайн. – 2012. – № 2. – Режим доступу до журн. : [http://www.nbu.gov.ua/e-journals/td/2012\\_2/index.html](http://www.nbu.gov.ua/e-journals/td/2012_2/index.html).
4. Кошель С. О. Визначення швидкостей точок плоского механізму з структурними групами третього класу графічним способом / С. О. Кошель, Г. В. Кошель // Вісник Київського національного університету технологій та дизайну. – 2013. – № 3. – С. 30-34.
5. Макаров Е. Г. MathCAD : учеб. курс. / Е. Г. Макаров – СПб. : Питер, 2009. – 384 с. – ISBN 978-5-388-00201-3.
6. Орловський Б. В. Схемотехнічне моделювання механізмів основов'язальних машин з трьома ступенями вільності зі структурними групами III класу IV порядку / Б. В. Орловський, В. М. Дворжак, І. В. Савченко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2013. – № 3. – С. 174-181.
7. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко – М. : Наука, 1967. – 444 с.

#### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССА-ИНЕРЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОДВИЖНЫХ ТРЕХПОВОДКОВЫХ ЗВЕНЬЕВ МЕХАНИЗМОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН

ОРЛОВСКИЙ Б.В., ДВОРЖАК В.М.

*Киевский национальный университет технологий и дизайна*

**Цель.** Усовершенствование методов проектирования типовых механизмов технологических машин с использованием прикладных САД-программ.

**Методика.** Для выполнения исследований использовался экспериментальный метод определения момента инерции и положения центра масс подвижных звеньев механизмов технологических машин отрасли; для обработки результатов эксперимента использовался аналитический метод с применением программы MathCAD.

**Результаты.** Получен алгоритм экспериментального определения масса-инерционных характеристик подвижных звеньев механизмов, получены математические зависимости, позволяющие вычислить по результатам эксперимента значения осевого момента инерции подвижного звена сложной конфигурации и одновременно координаты его центра масс с использованием прикладной компьютерной программы MathCAD.

**Научная новизна.** Развитие экспериментальных методов автоматизированного проектирования типовых механизмов технологических машин с использованием компьютера.

**Практическая значимость** работы состоит в использовании полученных результатов исследований при проектировании целевых типовых механизмов технологических машин.

**Ключевые слова:** *момент инерции, центр масс, подвижное звено.*

## **EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE MASS-INERTIA PARAMETERS MOVING THREE PEDESTRIAN LINKS OF THE MECHANISM TECHNOLOGICAL MACHINES**

ORLOVSKY B.V., DVORZHAK V.M.

*Kyiv National University of Technologies and Design*

**Purpose.** Improvement of methods of designing standard mechanisms of technological machines using CAD-application programs.

**Methodology.** To perform the study used an experimental method for determining the moment of inertia and the position of the center of mass of moving parts of the mechanisms of technological machines industry; for processing the results of the experiment used an analytical method using the program MathCAD.

**Findings.** The algorithm of the experimental determination of the mass-inertial characteristics of mobile units mechanisms derived mathematical relationships that allow to calculate the results of the experimental values of the axial moment of inertia of the moving unit complex configuration while the coordinates of its center of mass using computer applications MathCAD.

**Originality.** Development of experimental methods aided design standard mechanisms of technological machines using a computer.

**Practical Value** of the work is the use of the results of research in the design of targeted types of mechanisms of technological machines.

**Keywords:** *moment of inertia, center of mass, movable link.*