УДК 330.47

О. Я. КОВАЛЬЧУК, М. М. БУБНЯК

Тернопільський національний економічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ ШВИДКИХ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ ТЕПЛІЦЕВИХ МАТРИЦЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ З АВТОКОРЕЛЯЦІЄЮ

Для знаходження параметрів множинної лінійної регресії з автокореляцією запропоновано використати узагальнений метод найменших квадратів з точним обчисленням оберненої матриці методу з врахуванням її тепліцевості. Завдяки такому підходу одержимо точні оцінки параметрів багатофакторної регресії у випадку автокореляції залишків.

Ключові слова: *економетрика, регресійний аналіз, адекватність моделі, мультиколінеарність, гетероскедастичність, автокореляція, багатофакторна регресія, узагальнений метод найменших квадратів, тепліцева матриця, прогнозування.*

Економічне прогнозування є одним із найважливіших методів дослідження економіки. Саме прогноз відображає складні взаємозв'язки між явищами та процесами на різних рівнях економічної системи. Основними засадами прогнозування є цілеспрямованість, системність, наукова обгрунтованість, інформаційна єдність, альтернативність та адекватність реальним процесам.

Для оцінки фактичного стану розвитку економіки використовують економетрику. Цей термін є поєднанням двох слів («економіка» та «метрика») і підкреслює специфіку та зміст свого значення: економетрика – це математичний запис зв'язків, які описує економічна теорія. Основною метою економетрики є математичний опис загальних (якісних) закономірностей економічної теорії на основі статистичних спостережень із використанням інструментів математики та статистики.

Регресійний аналіз є одним із базових методів прогнозування економічних систем. Він грунтується на тому, що статистичні дані відображають деякі закономірності та тенденції. Саме ці залежності між даними потрібно дослідити. Наступний крок – обчислення значень прогнозованих величин за межами інтервалу статистичних даних. Застосування моделі прогнозування можливе лише у випадку, коли встановлено достатньо точну залежність між статистичними даними, а також визначено область, на яку розповсюджується прогноз, тобто проекцію минулих і сучасних тенденцій на майбутнє.

Однак, за наявності лінійних, нелінійних та багатофакторних моделей прогнозування ці задачі розв'язати досить складно.

Бізнес-аналітик, використовуючи ту чи іншу модель, повинен перевірити її адекватність, відсутність мультиколінеарності, гетероскедастичності та автокореляції. Саме розв'язанню проблеми прогнозування лінійної багатофакторної моделі з автокореляцією присвячена дана робота. Авторами запропоновано використати економічні методи обчислення оберненої матриці узагальненого методу найменших квадратів. Багатофакторна лінійна регресія, а отже і теоретичні дані, завдяки точним обчисленням є ефективнішими у порівнянні з наближеними коефіцієнтами регресійного тренда.

Об'єкти та методи дослідження

Дослідженню економетричних моделей з автокореляцією присвячено багато праць вітчизняних та зарубіжних вчених, серед них В. І. Єлейко [1, 2], С. А. Айвазян [3], В. С. Мхітарян [4], Н. Ш. Кремер [5] та лінійка інших авторів. Проблемою побудови моделей для реалізації ефективних алгоритмів відшукання елементів оберненої матриці спеціального вигляду займались М. О. Недашковський та О. Я. Ковальчук [6].

Той чи інший метод розв'язання проблеми автокореляції використовує наближені обчислення, що призводить до втрати точності результатів прогнозу. Залишається відкритим питання адекватності отриманого рівняння багатофакторної лінійної регресії реальній економічній системі, яка досліджується.

Постановка завдання

Метою дослідження є уточнення параметрів багатофакторної лінійної моделі прогнозування з автокореляцією залишків завдяки використанню тепліцевості матриці методу. Одержано точнішу лінію прогнозування завдяки використанню запропонованих економічних обчислювальних схем.

Результати та їх обговорення

Складні зв'язки між економічними явищами часто моделюють за допомогою багатфакторного лінійного рівняння регресії. В таке рівняння входить результуюча змінна x_0 і декілька факторів $x_1, x_2, ..., x_p$. У більшості випадків лінійна множинна регресія достатньо точно описує явище, яке досліджують. Однак, багато економічних явищ та процесів таким рівнянням не можливо змоделювати.

В загальному випадку використовують складніші рівняння регресії: поліноміальні, логарифмічні тощо. Такі зв'язки однофакторного аналізу були розглянуті авторами в [7].

Для багатофакторної лінійної моделі з p факторами впливу бізнес-аналітик повинен обрати та обгрунтувати тип рівняння регресії перед початком розрахунків. Для дослідження економічних явищ достатньо вибрати 3–4 фактори, максимум – 8. З метою підвищення точності моделі потрібно збільшити кількість даних у статистичній лінійці. Вважають, що кількість статистичних даних повинна бути в 10 разів більшою від кількості факторів. Однак, якщо факторні змінні корелюють між собою (а саме цю проблему ми будемо розглядати далі), то жодне збільшення статистичної лінійки не покращить точності моделі.

Використаємо класичну багатофакторну лінійну модель, яка враховує p факторів [2, 3, 5]:

$$x_0 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon , \tag{1}$$

де x_0 – результуюча змінна, $x_1, x_2, ..., x_p$ – факторні змінні, $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p$ – параметри рівняння регресії, ε – залишки моделі (випадкові величини). Отже, одержимо наступне теоретичне рівняння множинної регресії:

$$\tilde{x}_0 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_p x_p ,$$

яке дає $\tilde{x}_0$ – теоретичне значення результуючої змінної при заданих факторах $x_1, x_2, ..., x_p$; коефіцієнти регресії $b_1, b_2, ..., b_p$ та b_0 – вільний член рівняння регресії. Всі дані економетричної моделі задамо у вигляді наступної таблиці:

x_0	x_1	x_2	…	x_p	ε_0
x_{01}	x_{11}	x_{21}	…	x_{p1}	ε_1
x_{02}	x_{12}	x_{22}	…	x_{p2}	ε_2
…	…	…	…	…	…
x_{0n}	x_{1n}	x_{2n}	…	x_{pn}	ε_n

де x_{ji} – фактичне значення i-го спостереження j-ї факторної змінної ($i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,p}$), ε_i – i-ий залишок.

Для обчислення коефіцієнтів регресії $b_0, b_1, \ldots, b_p$ використовують метод найменших квадратів, який потребує перевірки 6 гіпотез [2]. При дослідженні моделі потрібно перевірити виконання всіх цих гіпотез.

Розглянемо економетричну модель, у якій $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$, $i \neq j$ (i, $j=\overline{1,n}$). Порушення четвертої гіпотези [2] називають автокореляцію залишків. Бізне-аналітик для перевірки наявності автокореляції може використати лінійку класичних критерів, зокрема Дарбіна-Уотсона, Бреуша-Годфрі, Льюінга-Бокса [2, 3, 5].

Припустимо, що для досліджуваної моделі наявність автокореляції встановлена.

Запишемо її у формальному вигляді $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$ або у матричному представленні:

$$E(\varepsilon\varepsilon^T)=V,$$

де $V=\sigma^2\Omega$,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

і ρ описує коваріацію залишків. Зазначимо, що матриця Ω є тепліцевою.

Для знаходження параметрів $b_0, b_1, \ldots, b_p$ ми не можемо використати звичайний метод найменших квадратів, тому застосуємо метод Ейкена [2, 3, 5].

Отже, невідомі параметри регресійної моделі шукаємо за формулою:

$$b = \left(X^T\Omega^{-1}X\right)^{-1}\left(X^T\Omega^{-1}x_0\right), \tag{1}$$

де Ω^{-1} – обернена до тепліцевої матриці Ω і

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{p1} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & \cdots & x_{p1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix}.$$

Для спрощення обчислення матриці Ω^{-1} зазвичай використовують припущення, що $\rho^n \to 0$ ($n>2$), оскільки $\rho < 1$, тобто в загальному випадку припускають, що матриця Ω близька до трьохдіагональної.

У даній роботі для обчислення точного значення Ω^{-1} запропоновано застосувати швидкий алгоритм Тиртишнікова знаходження матриці, оберненої до тепліцевої [6]. Ідея алгоритму полягає у використанні специфічних властивостей тепліцевості, тобто достатньо обчислити лише перший та останній стовпці оберненої матриці, за якими можна записати решту її елементів. Позначимо через вектори $\alpha^{(k)}$ та $\beta^{(k)}$, $k=1,\ldots,n-1$ відповідно перший та останній стовпці оберненої матриці для кожної з відсічених систем Ω_k, $k=1,\ldots,n-1$.

Обчислимо елементи першого та останнього стовпців оберненої матриці за таким алгоритмом [6]:

для $k=0$: $\alpha_0{}^{(0)}=\beta_0{}^{(0)}=\dfrac{1}{\Omega_0}$,

для $k=1,\ldots,n-1$: $F_k=\Omega_k\alpha_0{}^{(k-1)}+\Omega_{k-1}\alpha_1{}^{(k-1)}+\ldots+\Omega_1\alpha_{k-1}{}^{(k-1)}$,

$$R_k=\Omega_{-1}\beta_0{}^{(k-1)}+\Omega_{-2}\beta_1{}^{(k-1)}+\ldots+\Omega_{-k}\beta_{k-1}{}^{(k-1)},$$

$$U_k=\frac{1}{1-F_kR_k},\ S_k=-U_kF_k,\ V_k=-U_kR_k,$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0{}^{(k)}\\ \alpha_1{}^{(k)}\\ \cdots\cdots\\ \alpha_{k-1}{}^{(k)}\\ \alpha_k{}^{(k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_0{}^{(k-1)}\\ \alpha_1{}^{(k-1)}\\ \cdots\cdots\\ \alpha_{k-1}{}^{(k-1)}\\ 0\end{bmatrix}U_k+\begin{bmatrix}0\\ \beta_0{}^{(k-1)}\\ \cdots\cdots\\ \beta_{k-2}{}^{(k-1)}\\ \beta_{k-1}{}^{(k-1)}\end{bmatrix}S_k,$$

$$\begin{bmatrix}\beta_0{}^{(k)}\\ \beta_1{}^{(k)}\\ \cdots\cdots\\ \beta_{k-1}{}^{(k)}\\ \beta_k{}^{(k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_0{}^{(k-1)}\\ \alpha_1{}^{(k-1)}\\ \cdots\cdots\\ \alpha_{k-1}{}^{(k-1)}\\ 0\end{bmatrix}V_k+\begin{bmatrix}0\\ \beta_0{}^{(k-1)}\\ \cdots\cdots\\ \beta_{k-2}{}^{(k-1)}\\ \beta_{k-1}{}^{(k-1)}\end{bmatrix}U_k.$$

Теоретично є лише одне місце алгоритму, яке може призвести до похибки (ділення на нуль). Це операція ділення, яка визначає величину U_k. Але помилка (теоретично) неможлива, якщо в матриці A будуть відмінними від нуля всі ведучі мінори [6]. При цьому гарантується, що $1-F_kR_k\neq 0$ для будь-якого k.

Після того, як знайдено перший та останній стовпці оберненої матриці, можна повністю відтворити Ω^{-1} за такою схемою [8]:

$$\Omega^{-1}=\alpha_0{}^{-1}\left\{\begin{pmatrix}\alpha_0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \ldots & \alpha_0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \cdots & \beta_0\\ 0 & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \ldots & \beta_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_{n-1}\end{pmatrix}-\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \beta_0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \ldots & \beta_0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & \alpha_{n-1} & \ldots & \alpha_2 & \alpha_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n-1}\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Маючи точне значення оберненої матриці методу, знаходимо параметри регресії $b_0, b_1, \ldots, b_p$ за формулою (1). Подальша робота бізнес-аналітика полягає в аналізі лінії тренда, перевірці її адекватності і побудові прогнозу.

Висновки

Застосовано ефективний алгоритм знаходження точних значень оберненої матриці методу. В результаті одержано якісніші оцінки параметрів багатофакторної регресії, а отже прогноз, на основі якого здійснюють передбачення і приймають управлінські рішення, буде надійнішим і за його результатами можна отримати науково обґрунтовані варіанти тенденцій розвитку керованого об’єкта. У випадку використання економетричної моделі з автокореляцією неефективні оцінки параметрів $b_0, b_1, \ldots, b_p$ призводять до неточних прогнозів та до неможливості використання критеріїв *t*-статистики Стьюдента і *F*-статистики Фішера.

Список використаної літератури

1. Єлейко В. Основи економетрії. Ч. 1. – Львів: ТОВ «Марка Лтд», 1995. – 191 с.
2. Єлейко В. І., Боднар Р. Д., Демчишин М. Я. Економетричний аналіз діяльності підприємств. – Тернопіль: «Навчальна книга Богдан», 2011. – 365 с.
3. Айвазян С. А., Мнитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
4. Мхитарян В. С., Архипова М. Ю., Сиротин В. П. Эконометрика. – М.: ЕАОИ, 2008, – 144 с.
5. Кремер Н. Ш., Путко Б. А. Эконометрика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 381с.
6. Недашковський М. О., Ковальчук О. Я. Обчислення з λ–матрицями. – К.: Наукова думка, 2007. – 294 с.
7. Ковальчук О. Я., Бубняк М. М. Математичне моделювання економічних процесів методом екстраполяції // Зб. наук. праць «Фінансова система України». – Острог: «Острозька академія». – 2010. – Вип. 15. – С. 482–488.
8. Тыртышников Е. Е. Теплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения. – М.: ОВМ АН СССР, 1989. – 184 с.

Стаття надійшла до редакції 17.10.2012

Применение быстрых алгоритмов для теплицевых матриц к решению эконометрических задач с автокорреляцией

Ковальчук О.Я, Бубняк М.М.
Тернопольский национальный экономический университет

Для нахождения параметров множественной линейной регрессии с автокорреляцией предложено использовать обобщенный метод наименьших квадратов с точным вычислением обратной матрицы метода с учетом ее теплицевости. Благодаря такому подходу получим точные оценки параметров многофакторной регрессии в случае автокорреляции остатков.

Ключевые слова: эконометрика, регрессионный анализ, адекватность модели, мультиколлинеарность, гетероскедастичность, автокорреляция, многофакторная регрессия, обобщенный метод наименьших квадратов, теплицева матрица, прогнозирование

Application of fast algorithms for Toeplitz matrices to solving of econometric problems with autocorrelation

Kovalchuk O., Bubniak M.
Ternopil National Economic University

To find the parameters of the multiple linear regression with autocorrelation is proposed to use the generalized least squares method with the exact calculation of the inverse matrix method, given its Toeplitz. Through this approach, we obtain accurate estimates of the parameters of multivariate regression in the case of autocorrelation remains.

Keywords: econometrics, regression analysis, the adequacy of the model, multicollinearity, heteroscedasticity, autocorrelation, multivariable regression, generalized least-squares method, Toeplitz matrix, prediction.