УДК 621.3.029.6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ МАССОПЕРЕНОСА СОРБЕНТА В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ МЕЖФАЗОВОЙ ОБЛАСТИ ТЭПВ

Ю.В. ШИНКАРЕНКО, В.А. МИХАЙЛЕЦ

Киевский национальный университет технологий и дизайна

У статті розглянуті процеси массопереносу гігроскопічної речовини в межфазової електропровідної області на межі розподілу твердої та газоподібної фаз під дією накладення електричного й магнітного полях. Показано, що явище массопереносу сорбенту також є одним з факторів обмеження ресурсу первинного перетворювача вологості газових середовищ

Одним из недостатков термоэлектролитического преобразователя влажности газовых сред (ТЭПВ) является ограниченный его ресурс, причиной которого является электрохимическое разложение гигроскопического вещества на поверхности электродов при протекании электрического тока через водный раствор соли хлорида лития [1].

Объекты и методы исследований

Авторами настоящей статьи установлено, что на ресурс ТЭПВ, кроме электрохимического разложения гигроскопического вещества на поверхности электродов при переносе электрических зарядов через межэлектродный промежуток, также оказывает влияние массоперенос его вдоль электродов под действием электрического и магнитного полей влагопреобразующего элемента.

Результаты и их обсуждение

Влагопреобразующий элемент состоит из трубки, на цилиндрическую поверхность которой одет стеклочулочек. Поверх стеклочулочка эквидистантно намотаны два электрода с односторонним подключением к ним электрического потенциала [2]. В межэлектродном объемном пространстве стеклочулочка сформирована твердая фаза (ТФ), состоящая из кристаллической соли хлорида лития. На поверхности ТФ, вследствие энергетического взаимодействия ТФ с анализируемой влажной газовой средой (газообразная фаза), на границе раздела фаз существует межфазовая электропроводная область (МЭО), через которую осуществляется перенос электрических зарядов частицами, обладающими зарядом и свободой перемещения (подвижностью), какими являются ионы гидроксония, гидроксила и ионногидратные комплексы (гидратированные ионы Li^+ и Cl^-).

При своем движении частицы испытывают действие сил сопротивления, вызывающих “вязкое” торможение. Торможение частицы обусловлено уменьшением импульса движущейся частицы и соответствующей потерей ею механической энергии. При малых скоростях силу сопротивления среды движению заряда можно принять пропорциональной скорости [3]:

$$\vec{f}_{сопр.} = -\eta \cdot \vec{V}\ . \qquad (1)$$

Рассмотрим, как движение заряженной частицы в среде с сопротивлением η влияет на дрейф в накладывающихся электрическом $\vec{E}$ и магнитном $\vec{B}$ полях.

Уравнение движения частицы с зарядом q и массой m в векторной форме с учетом электрической силы qE, силы Лоренца qVB и силы сопротивления $-\eta V$ имеет вид:

$$m\ddot{r} = q\vec{E} + q\left[\dot{\vec{r}}, \vec{B}\right] - \eta\dot{\vec{r}}\ . \qquad (2)$$

Выберем оси координат так, чтобы электрическое поле E совпадало с осью x, а магнитное поле с осью z. Тогда уравнение движения в проекциях на оси можно представить системой:

$$m\ddot{x} = qE + qB\dot{y} - \eta\dot{x}\,. \tag{3}$$

$$m\ddot{y} = qB\dot{x} - \eta\dot{y}\,. \tag{4}$$

$$m\ddot{z} = -\eta\dot{z}\,. \tag{5}$$

Решим эту систему уравнений при начальных условиях, когда

$$t = 0;\, x(0) = 0;\, y(0) = 0;\, z(0) = 0\,, \tag{6}$$

(начало движение из начала координат) и

$$t = 0;\, \dot{x}(0) = 0;\, \dot{y}(0) = 0;\, \dot{z}(0) = 0 \tag{7}$$

т.е. упорядоченное движение заряда под действием рассматриваемых сил начинается из состояния покоя $V_0 = 0$.

Из уравнения (4) имеем:

$$\dot{x} = -\frac{m}{qB}\ddot{y} - \frac{\eta}{qB}\dot{y} \tag{8}$$

и

$$\ddot{x} = -\frac{m}{qB}\dddot{y} - \frac{\eta}{qB}\ddot{y}\,. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в (3) получим:

$$\frac{m^2}{qB}\dddot{y} - \frac{\eta m}{qB}\ddot{y} = qE + qB\dot{y} + \frac{\eta m}{qB}\ddot{y} + \frac{\eta^2}{qB}\dot{y}\,. \tag{10}$$

Выражение (10) приведем к виду:

$$\frac{m^2}{qB}\dddot{y} + 2\frac{\eta m}{qB}\ddot{y} + \left(\frac{q^2B^2 + r^2}{qB}\right)\dot{y} = -qE \tag{11}$$

или

$$m^2\dddot{y} + 2\eta m\ddot{y} + \; q^2B^2 + \eta^{\;2} \; \dot{y} = -q^2BE\,. \tag{12}$$

Неоднородное дифференциальное уравнение (12) имеет полное решение:

$$y_{полн.} = y_{общ.} + y_{част.},$$

состоящее из общего решения уравнения без правой части:

$$m^2\dddot{y} + 2\eta m\ddot{y} + \; q^2B^2 + \eta^2 \; \dot{y} = 0 \tag{13}$$

и частного решения уравнения (12).

Решаем уравнение (13) с помощью характеристического уравнения:

$$m^2\lambda^3 + 2\eta m\lambda^2 + \; q^2B^2 + \eta^2 \; \lambda = 0\,. \tag{14}$$

Решениями уравнения (14) будет:

$$m^2\lambda^2 + 2\eta m\lambda + \; q^2B^2 + \eta^2 \; = 0 \tag{15}$$

и

$$\lambda^3 = 0\,. \tag{16}$$

Для уравнения (15) или, что то же самое, для уравнения:

$$\lambda^2 + 2\frac{\eta}{m}\lambda + \frac{q^2B^2 + \eta^2}{m^2} = 0 \tag{17}$$

имеем $$\lambda_{1,2} = -\frac{\eta}{m} \pm i\frac{qB}{m}, \quad \text{где } i = \sqrt{-1}. \tag{18}$$

Или, обозначив: $$\eta / m = \beta \tag{19}$$

и $$q\beta / m = \omega_0, \tag{20}$$

запишем общее решение уравнения (13) в виде:

$$y_{общ.} = C_1 e^{-\beta t} Cos\ \omega_0 t + C_2 e^{-\beta t} Sin\ \omega_0 t + C_3 \tag{21}$$

После этого найдем частное решение уравнения (12) в виде: $y_{част.} = At$ (22)

подставляя (22) в (12) находим: $(q^2B^2 + \eta^2)A = -q^2EB$, откуда $A = -\frac{q^2EB}{q^2B^2 + \eta^2}$

или, вводя β и ω_0, находим:

$$A = -\frac{(q/m)^2 EB}{\omega_0^2 + \beta^2}. \tag{23}$$

Тогда частным решением уравнения (12) будет:

$$y_{част.} = -\frac{(q/m)^2 EB}{\omega_0^2 + \beta^2} \cdot t \tag{24}$$

а полным решением уравнения (12) будет выражение:

$$y = C_1 e^{-\beta t} Cos\omega_0 t + C_2 e^{-\beta t} Sin\omega_0 t - \frac{(q/m)^2 EB}{\omega_0^2 + \beta^2} t + C_3. \tag{25}$$

Используя начальное уравнение (6), находим: $C_3 = -C_1$, (26)

а используя (7), находим C_2 через C_1:

$$C_2 = \frac{\beta}{\omega_0} C_1 - \frac{(q/m)^2 EB}{(\omega_0^2 + \beta^2)\omega_0}. \tag{27}$$

Подставляя (26) и (27) в (25) получаем окончательно:

$$y(t) = C_1 e^{-\beta t} Cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0} C_1 e^{-\beta t} Sin\omega_0 t - \frac{(q/m)^2 EB}{\omega_0(\omega_0^2 + \beta^2)} \cdot e^{-\beta t} Sin\omega_0 t - \frac{(q/m)^2 EB}{\omega_0^2 + \beta^2} t - C_1. \tag{28}$$

Выражение (28) является уравнением движения заряженной частицы вдоль оси y.

Найдем уравнение движения частицы вдоль оси x. Из уравнения (3) найдем $\dot{y}$:

$$\dot{y} = \frac{m}{qB}\ddot{x} + \frac{\eta}{qB}\dot{x} - \frac{E}{B} \quad \text{и} \quad \ddot{y} = \frac{m}{qB}\dddot{x} + \frac{\eta}{qB}\ddot{x}. \tag{29), (30}$$

Подставляя (29) и (26) в (4) и преобразовывая, получим дифференциальное уравнение для x, которое тоже является неоднородным: $m^2\ddot{x} + 2\eta m\ddot{x} + (q^2B^2 + \eta^2)\dot{x} = \eta qE$. (31)

Уравнение (31) отличается от (12) только правой частью. Следовательно, общее решение однородного уравнения:

$$m^2\ddot{x} + 2\eta m\ddot{x} + (q^2B^2 + \eta^2)\dot{x} = 0 \tag{32}$$

запишется по аналогии с (21):

$$x_{общ.} = C'e^{-\beta t}Cos\omega_0 t + C''e^{-\beta t}Sin\omega_0 t + C''' \quad . \tag{33}$$

Частичное решение уравнения (31) ищем в виде:

$$x_{част.} = A't . \tag{34}$$

Постоянную A' находим после подстановки (34) в (31). Тогда:

$$x_{част.} = \frac{q/m \cdot \beta E}{\omega_0 + \beta^2} \cdot t . \tag{35}$$

А полным решением уравнения (31) будет:

$$x\ t\ = C'e^{-\beta t}Cos\omega_0 t + C''e^{-\beta t}Sin\omega_0 t + \frac{q/m\ \beta E}{\omega_0^2 + \beta^2} t + C''' . \tag{36}$$

Используя начальные условия (6) и (7), найдем постоянные C''' и C'' через C' и после постановки их в (36) получаем уравнение движения частицы вдоль оси x:

$$x\ t\ = C'e^{-\beta t}Cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0} C'e^{-\beta t}Sin\omega_0 t - \frac{q/m\ \beta E}{\omega_0\ \omega_0^2 + \beta^2} e^{-\beta t}Sin\omega_0 t + \frac{q/m\ \beta E}{\omega_0^2 + \beta^2} t - C' . \tag{37}$$

Решение выражений (28) и (37) содержат постоянные C_1 и C' для нахождения которых следует задаться граничными условиями. Наряду с этими постоянными в уравнения входят величины β и ω_0, которые зависят от характеристик заряженной частицы (ее заряд q и массы m), а также от диссипативных свойств МЭО, характеризуемых введенным коэффициентом сопротивления η.

Чтобы выразить η через известные величины, рассмотрим механизм движения заряда при действии на него ускоряющей силы $F_e = qE$ (где E — напряженность электрического поля между электродами влагопреобразующего элемента) и тормозящей силы $f_{сопр.} = -\eta V$.

Если установилось стационарное движение заряда, то средняя скорость переноса зарядов по полю прямо пропорциональна напряженности поля *E:*

$$\bar{V} = вE , \tag{38}$$

где $в$ — подвижность заряда в межфазной области.

Эта подвижность зависит от радиуса иона, а также от степени его гидратации, т.е. от размера аквакомплекса. Из условия стационарности движения следует, что: $qE - \eta V = 0$, отсюда:

$$V = E\ \ q/\eta\ \ . \tag{39}$$

Сравнивая выражения (38) и (39), приходим к выводу, что коэффициент сопротивления η связан с подвижностью $в$ и зарядом иона q соотношением:

$$\eta = q/в . \tag{40}$$

Оценим порядок величины коэффициента сопротивления η движению иона в МЭО. Учитывая, что большинство ионов в растворах при t = *25°C* имеет подвижность порядка $в \approx 5 \cdot 10^{-6}\ \ м^2/В \cdot с$, а заряд равен элементарному $q = 1,6 \cdot 10^{-19} Кл$, получаем:

$$\eta = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{5 \cdot 10^{-6}} \approx 3 \cdot 10^{-14} \left(\frac{Кл \cdot м^2}{В \cdot с} \right).$$

Тогда коэффициент затухания $\beta = \eta / m$ для протона:

$$\beta = \frac{3\cdot 10^{14}}{1,67\cdot 10^{-27}} \approx 2\cdot 10^{13} \ \ 1/c \ ,$$

а ларморова частота (выражение 4):

$$\omega_0 = \frac{1,6\cdot 10^{-19} \ \cdot \ 3\cdot 10^{-5}}{1,67\cdot 10^{-27}} \approx 10^{3} \ \ 1/c \ .$$

Значение $B \approx 3\cdot 10^{-5} Тл$ соответствует точке в середине межэлектродного промежутка влагопреобразующего элемента и рабочем токе ~ 1мА.

Приведенные значения величины β и ω_0 позволяют оценить коэффициенты членов в уравнениях (28) и (37).

Если $q/m \approx 10^{8}$ Кл/кг, $\beta \approx 10^{13}$ (1/с) и $\omega_0 \approx 10^{3}$ (1/с), то за время, меньшее четверти периода переменного тока, (при $f_ц = 50 Гц, t = 10^{-3} c$) $e^{-\beta t}$ обращается практически в нуль. По этой причине члены, содержащие экспоненту $e^{-\beta t}$, из дальнейшего рассмотрения можно исключить.

Тогда движение частицы вдоль осей x и y можно описать приближенными уравнениями:

$$x \approx \frac{(q/m)\beta E}{\omega_0^2 + \beta^2} t \tag{41}$$

и

$$y \approx \frac{(q/m)^2 EB}{\omega_0^2 + \beta^2} t \ . \tag{42}$$

Соответственно и скорость частицы вдоль осей x и y:

$$V_x \approx \dot{x} = \frac{(q/m)\beta E}{\omega_0^2 + \beta^2} \tag{43}$$

и

$$V_y \approx \frac{(q/m)^2 EB}{\omega_0^2 + \beta^2} \ . \tag{44}$$

Как и следовало ожидать, смещение частицы в направлении оси x пропорционально напряженности электрического поля и скорость ее будет значительно превышать скорость вдоль оси y.

С учетом: $\beta = \frac{\eta}{m}$; $\eta = \frac{q}{в}$; $\omega_0 = \frac{qB}{m}$; $B = \frac{q}{mв}$, формулы (41) и (42) преобразуются к виду:

$$x = \frac{q\beta E}{m\left(\omega_0^2 + \beta^2\right)} t = \frac{E}{в\left(B^2 + 1/в^2\right)} t = \frac{Eв}{B^2 в^2 + 1} t \ , \tag{45}$$

$$y = \frac{q^2 EB}{m^2\left(\omega_0^2 + \beta^2\right)} t = \frac{EB}{B^2 + 1/в^2} t = \frac{Eв^2 B}{B^2 в^2 + 1} t \ . \tag{46}$$

Поэтому и скорость по осям:

$$\dot{x} = \frac{Eв}{B^2 в^2 + 1} t \ , \tag{47}$$

$$\dot{y} = \frac{Eв^2 B}{B^2 в^2 + 1} t \ . \tag{48}$$

Таким образом, скорость по оси y $\dot{y}$ отличается от $\dot{x}$ в $\dot{y}/\dot{x} = Bв$ раз. Уравнение траектории заряженной частицы будет прямая: $y = Bвx$.

Иными словами, за один и тот же промежуток времени смещение по оси y будет отличаться от смещения по оси x в $y/x = Bв$ *раз.*

Приближенные расчеты смещения зарядов вдоль электродов преобразователя влажности газов, проведенные по выражениям (47) и (48), например, для протона, показали, что скорость смещения его вдоль электродов на шесть порядков меньше, чем перпендикулярно к электродам влагопреобразователя. Но, несмотря на малость этой скорости, смещение зарядов вдоль электродов является фактором ограничения ресурса преобразователя влажности газов, так как его работа исчисляется порядка пяти тысяч часов.

Выводы

В результате проведенных в статье исследований построена математическая модель массопереноса гигроскопического вещества в межфазовой электропроводной области под действием электрического и магнитного полей термоэлектролитического преобразователя влажности газов.

Определено, что явление массопереноса сорбента, кроме его электрохимического разложения на поверхности электродов под действием электрического тока, является одним из факторов ограничения ресурса термоэлектролитического преобразователя влажности газов из–за смещения границы термополя вдоль влагопреобразующего элемента. Уменьшение количества гигроскопического вещества в твердой фазе (в зоне разрыва электродов) является следствием массопереноса гигроскопического вещества направленного от места разрыва электродов к месту их ввода во влагопреобразующий элемент, в результате чего происходит смещение во времени градуировочной характеристики преобразователя, т.е. сокращение ресурса ТЭПВ.

Результаты проведенной работы позволили разработать конструкцию влагопреобразующего элемента ТЭПВ с увеличенным ресурсом за счет изменения направления массопереноса гигроскопического вещества к месту его интенсивной выработке.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Четверухин Б.М. Контроль и управление искусственным микроклиматом.– М.: Стройиздат,– 1984.– 135с.

2. Нельсон Д., Амдур Е. Принцип действия гигрометров температуры насыщения, основанных на электрическом обнаружении фазового перехода соль – раствор. Влажность. Т.1. – Л.: Гидрометеорологическое из–во, – 1967. – с.211–224.

3. Е.М. Ландау Л.Д., Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Т.8.– М.: Наука,– 1982.– 620 с.