

УДК 677.075

ЧИСЕЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ З ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВОДОВБИРАННЯ БАГАТОШАРОВИМИ ТЕКСТИЛЬНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

В.І. ВЛАСЕНКО

Київський національний університет технологій та дизайну

В роботі приведені результати чисельного експерименту по визначенню характеристик процесу водовбирання тришаровою текстильною структурою (розподілу вологи по товщині в залежності від часу) з використанням розробленої нами математичної моделі та даних макроексперименту для індивідуальних складових структури. Запропонована модель та методика дозволяють прогнозувати процес водовбирання багатошаровими текстильними структурами

Постановка завдання

Мета роботи – провести прогнозуючий розрахунок процесу водовбирання тришаровим текстильним матеріалом (розподілу вологи по товщині багатошарової структури в залежності від часу) з використанням розробленої нами аналітичної моделі та даних макроексперименту для індивідуальних складових.

Об'єкти та методи дослідження

Об'єкт дослідження – процес водовбирання багатошаровими текстильними матеріалами.

Предмет дослідження – аналітична модель та методика прогнозування водовбирання багатошаровими текстильними матеріалами

Для математичного моделювання процесу водовбирання використовувались методи математичного аналізу, зокрема методи диференційного і інтегрального числення, методи математичної фізики; для комп'ютерного моделювання – програмне середовище MathCAD. Параметри водовбирання індивідуальними текстильними матеріалами проводились на приладі та за методикою [1].

Результати та їх обговорення

Як об'єкт аналітичного розрахунку основних параметрів водовбирання ми вибрали тришаровий текстильний матеріал, що складається з трьох індивідуальних текстильних шарів різного сировинного складу, різного способу виготовлення, різної структури, з різними фізичними властивостями (таблиця 1).

Схематичне зображення процесу водовбирання тришаровим матеріалом представлено на рис.1. При розрахунку ми приймаємо такі умови: вода поступає через площину нижнього шару перпендикулярно його площині. Для цього шару граничною є 100% концентрація вологи на його нижній поверхні протягом всього часу експерименту (відносна вологість дорівнює 1).

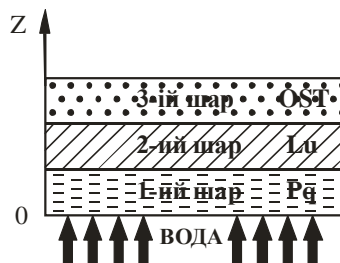


Рис.1. Схеми водовбирання тришаровим матеріалом

z – координата, що проходить перпендикулярно площині матеріалу (напрямок переносу вологи).

Таблиця 1. Структурні характеристики та показники деяких фізичних властивостей вихідних текстильних полотен

Умовне позначення зразку	Спосіб виготовлення	Вміст складників сировинного складу, %	Товщина, мм ДСТУ ISO 5084:2004	Поверхнева густина, г/см ² (ГОСТ 3811-72)	Гігроскопічність, % (ГОСТ 3816-81)	Розрахункова пористість, %, згідно [10]	Коефіцієнт повітропроникності (50 Па), см ³ /см ² ·с
Pq	Трикотажне полотно	Бавовна – 100	0,82	207	14,7	85	710±20
Lu	Тканина	ПЕТФ – 100	0,34	160	1,5	65	74±5
OST	Трикотажне полотно	ПЕТФ – 100	0,48	193	1,1	70	920±15

Для розрахунку параметрів водовбирання тришаровим матеріалом перш за все потрібно провести аналітичні розрахунки для кожного з вибраних індивідуальних шарів, які проводимо, використовуючи модель [2], за формулами (1) та (2).

$$U(z, t) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot e^{-A} \cdot e^{-B} \cdot \sin\left[\frac{(i-1)\pi z}{2}\right]}{\pi(2i-1)} \quad (1)$$

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} A \cdot B \cdot e^{-B-1} \cdot e^{-A} \cdot \sin\left[\frac{(i-1) \cdot \pi z}{2}\right] \quad (2)$$

де U – концентрація вологи в певній точці довільного шару;

t – час;

A, B – константи водовбирання, які є характерними для кожного матеріалу і безпосередньо з експерименту не визначаються, визначення констант проводили за алгоритмом, представленим в таблиці 2 (даний алгоритм розроблений нами в роботі в [3]).

Таблиця 2. Алгоритм визначення констант водовбирання вологи в текстильних матеріалах

1.	Вихідні дані, які визначаються з експерименту: U_{max}, V_{max}, t_b
2.	Розрахункові параметри:
2.1.	$\psi = \frac{V_{max} \cdot t_b}{U_{max}}$
2.2.	$\tau = 0,188 \cdot \psi + 1,667 \cdot \psi^2 - 2,432 \cdot \psi^3 + 1,458 \cdot \psi^4 - 0,339 \cdot \psi^5$
2.3.	$t_{max} = \frac{t_b}{\tau}$
2.4.	$B = 1 + 6,743 \cdot \psi - 16,8 \cdot \psi^2 + 23,667 \cdot \psi^3$
2.5.	$A = \frac{4,395}{t_{max}^B}$

В макроексперименті за методикою [1] визначаємо з достатньою точністю основні параметри водовбирання вибраних текстильних матеріалів (U_{max} – максимальне водовбирання, V_{max} – максимальна швидкість водовбирання, t_b – час, за який досягається максимальна швидкість водовбирання). Одержані криві водовбирання наведені на рис. 1, а шукані параметри водовбирання наведені в таблиці 3.

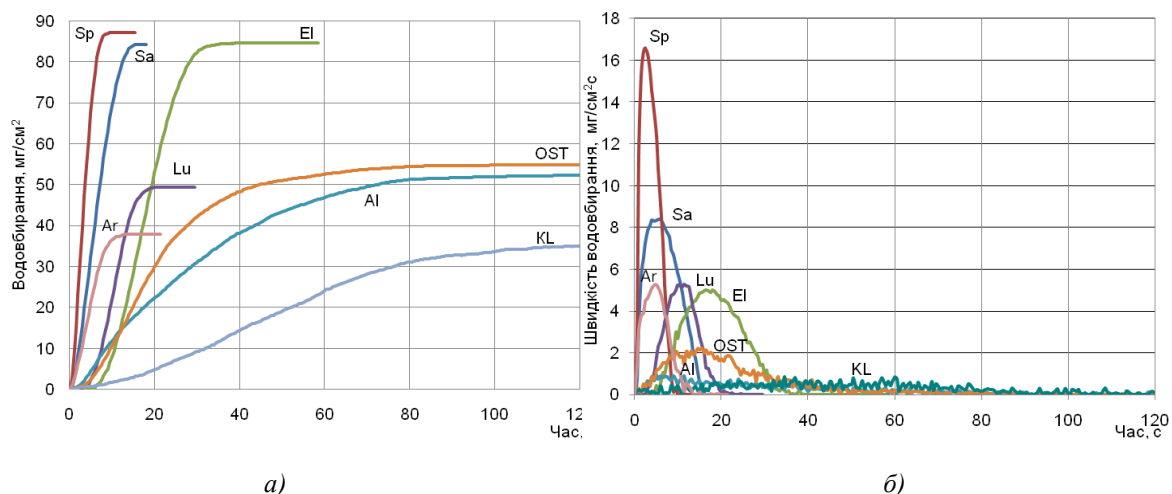


Рис. 2. Криві водовбирання а) та швидкості водовбирання б)

Таблиця 3. Параметри водовбирання індивідуальними текстильними матеріалами (експериментальні дані)

Умовне позначення текстильного матеріалу	$U_{max}, \mu\text{l}/\text{cm}^2$	$V_{max}, \mu\text{l}/\text{cm}^2\text{s}$	t_b, s
Pq	75	11	6,5
Lu	50	6	12
OST	55	4	17

Маючи експериментальні дані, визначаємо константи водовбирання A та B та максимальний час поглинання t_{max} для кожного окремого шару. Одержані дані подані в таблиці 4.

Таблиця 4. Константи водовбирання A та B індивідуальних текстильних матеріалів

Умовне позначення текстильного матеріалу	Розрахункові дані		
	t_{max}, s	B	A
Pq (1-й шар)	15	B_1 3,329	A_1 $1,008 \cdot 10^{-3}$
Lu (2-й шар)	20	B_2 4,611	A_2 $5,843 \cdot 10^{-6}$
OST (3-й шар)	80	B_3 4,268	A_3 $3,046 \cdot 10^{-6}$

Тепер ми маємо змогу для кожного індивідуального шару розрахувати теоретичні криві водовбирання та зміни швидкості водовбирання за формулами (1) та (2) (рис. 3 для шару Pq, рис. 4 для шару Lu, рис. 5 для шару OST).

Співставлення графічних залежностей, побудованих на основі математичного моделювання, з експериментальними кривими показує, що вони мають високу збіжність: передбачуване відхилення теоретичних даних від експериментальних не перевищує $\pm 4,5\%$ [4].

На наступному етапі, маючи аналітичні дані щодо констант водовбирання A та B для кожної складової тришарової структури, послідовно для кожного шару розраховуємо характеристики

водовбирання тришаровим матеріалом, який складається з шарів Pq, Lu, OST з урахуванням гальмування водовбирання в результаті поглинання вологи.

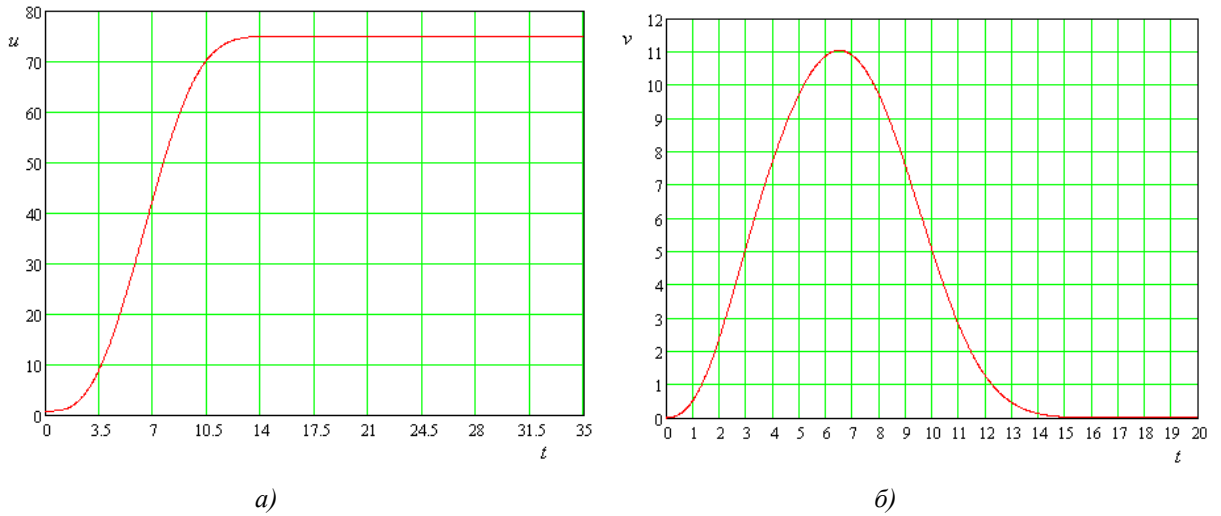


Рис.3. Теоретичні криві водовбирання а) та швидкості водовбирання б) для шару Pq

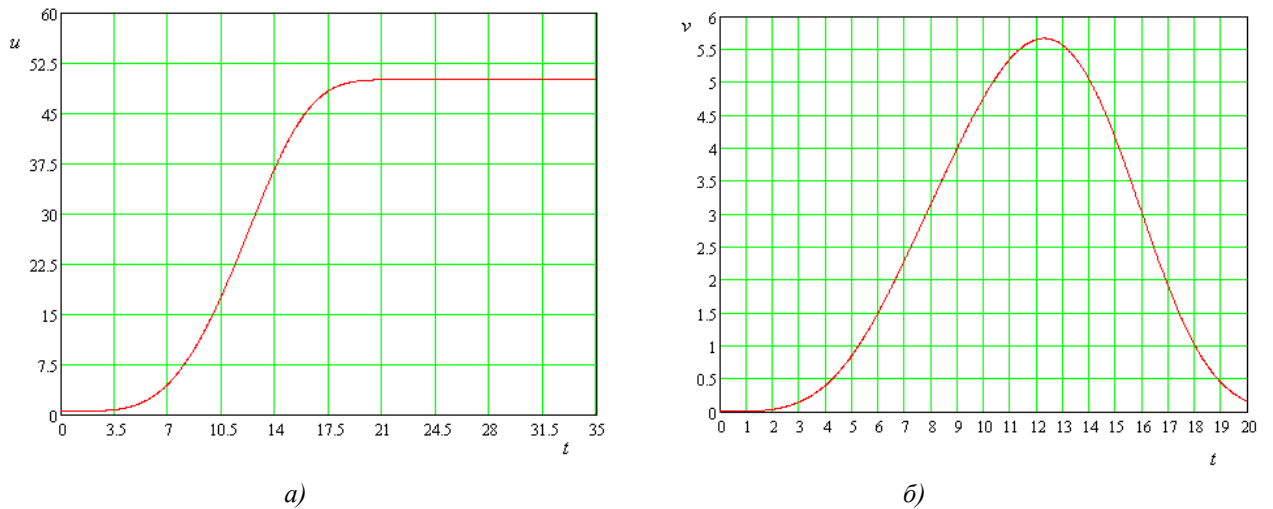


Рис.4. Теоретичні криві водовбирання а) та швидкості водовбирання б) для шару Lu

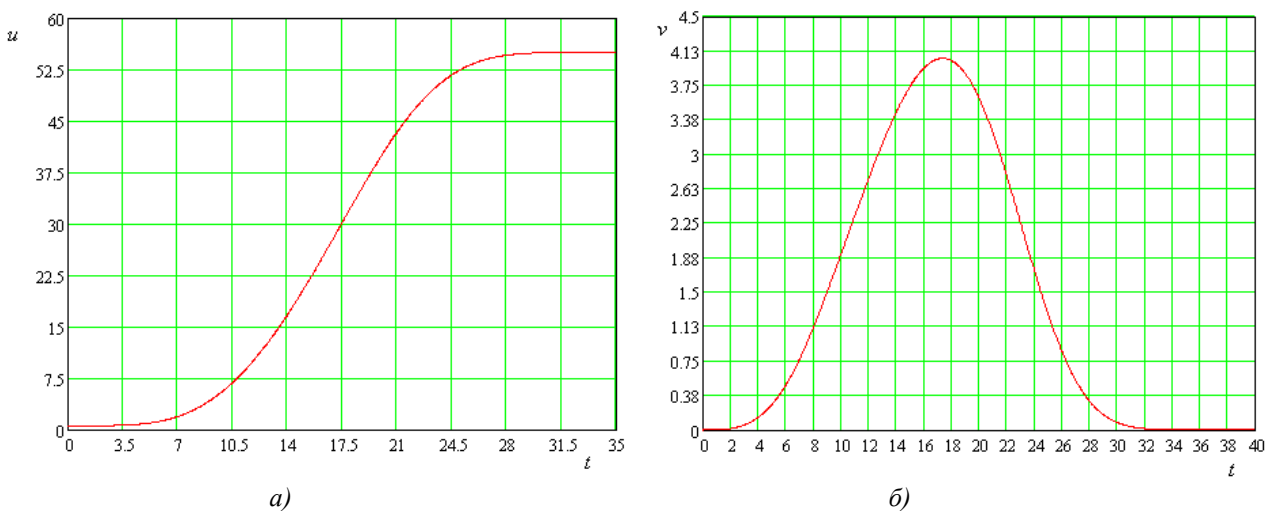


Рис.5. Теоретичні криві водовбирання а) та швидкості водовбирання б) для шару OST

Для розв'язку рівнянь дифузії крізь багатошаровий матеріал треба враховувати граничні умови як на зовнішніх границях матеріалів, так і на границях переходу від одного матеріалу до іншого. За такі умови приймаємо граничні умови першого роду при дифузії в однорідний шар матеріалу. Для першого шару характерною є рівноважна концентрація вологи на поверхні матеріалу, яка є постійною в часі при незмінних зовнішніх умовах. У випадку багатошарової конструкції формула розподілу концентрації вологи в одношаровому матеріалі може бути використана за умови, що на границі між першим та другим шаром (в загальному випадку, між кожним попереднім і наступним шаром) концентрація води є неперервною, вона постійно збільшується та являється функцією, яка обмежується часом.

Таким чином модель проходження вологи крізь перший шар не змінюється.

Зміна водовбирання по першому шару та зміна швидкості водовбирання для різних моментів часу показані на рис. 6 а) та рис. 6 б).

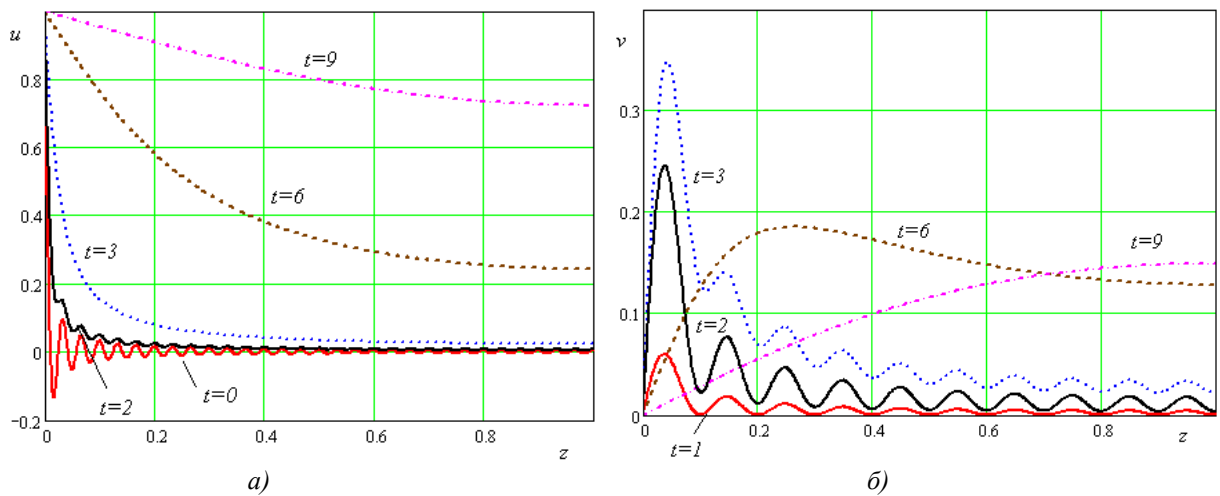


Рис.6. Зміна водовбирання по товщині шару а) та залежність швидкості зміни водовбирання від товщини б) для різних моментів часу (для першого шару Pq)

Загальне водовбирання першим шаром визначається за формулою

$$U_1(t) = U_{max1} \int_0^1 u_1(z,t) dz$$

де U_{max1} – максимальне водовбирання для шару Pq, яке визначене експериментально.

В подальших розрахунках подібні інтеграли беремо чисельно для обмеженого числа точок, оскільки час прямого розрахунку інтегралу є дуже великим. З цієї метою вибираємо інтервал часу, який є звідомо більшим, ніж встановлено в експерименті (наприклад, 100 секунд). Розбиваємо цей інтервал на певну кількість n при інтервалі $\Delta t (t_1, t_2, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n)$.

Товщину шару також ділимо на певну кількість інтервалів m , наприклад, 10.

Координати границь інтервалів z_j можуть бути обчислені як

$$z_j = \frac{j}{m}.$$

де j – номер довільної точки в середині шару.

m – кількість інтервалів по товщині.

Тоді безперервна функція вмісту вологи може бути записана як масив даних.

$$U(z, t) \rightarrow \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,i} & \dots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,i} & \dots & u_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{j,1} & u_{j,2} & \dots & u_{j,i} & \dots & u_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m,1} & u_{m,2} & \dots & u_{m,i} & \dots & u_{m,n} \end{bmatrix},$$

де $u_{j,i} = u\left(\frac{j}{m}, \frac{i_1}{n}\right)$

i_1 - номер інтервалу часу

Інтеграл переписуємо у вигляді суми, наприклад, за правилом трапецій; безперервну функцію загального вмісту вологи також представляємо у вигляді масиву

$$U(t) \rightarrow \{U_1 \ U_2 \ \dots \ U_i \ \dots \ U_{n-1}\}$$

Кожний елемент даного масиву визначається як сума

$$U_{it} = U_{\max} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{u_{j+1,i} + u_{j,i}}{2} \cdot \frac{j}{m}$$

Кінцева функція не є безперервною, але на графіку це практично непомітно (рис. 7а).

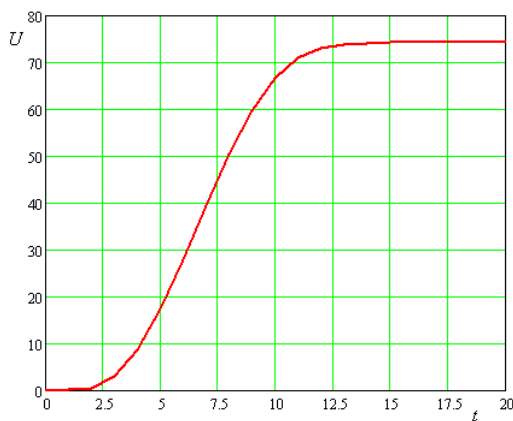
Зміна швидкості поглинання вологи визначається як похідна. Оскільки функція поглинання вологи задана як масив, похідну визначаємо як різницю.

$$V = \frac{dU}{dt} \text{ або наближено } V_i \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{1} = \{U_{i+1} - U_i\}_n$$

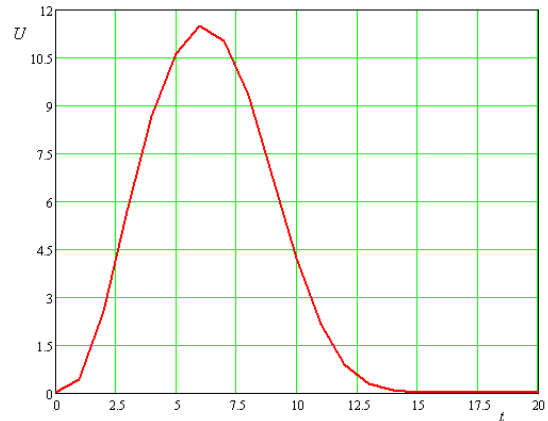
При цьому ми відмічаємо, що кількість даних щодо швидкості в масиві на одну менше, ніж даних щодо водовбирання.

$$V(t) \rightarrow \{V_1 \ V_2 \ \dots \ V_i \ \dots \ V_{n-1}\}$$

Графік, побудований за цими точками, має вигляд рис. 7.б).



а)



б)

Рис.7. Теоретичні криві водовбирання а) та швидкості водовбирання б) для шару Pq на основі математичної моделі

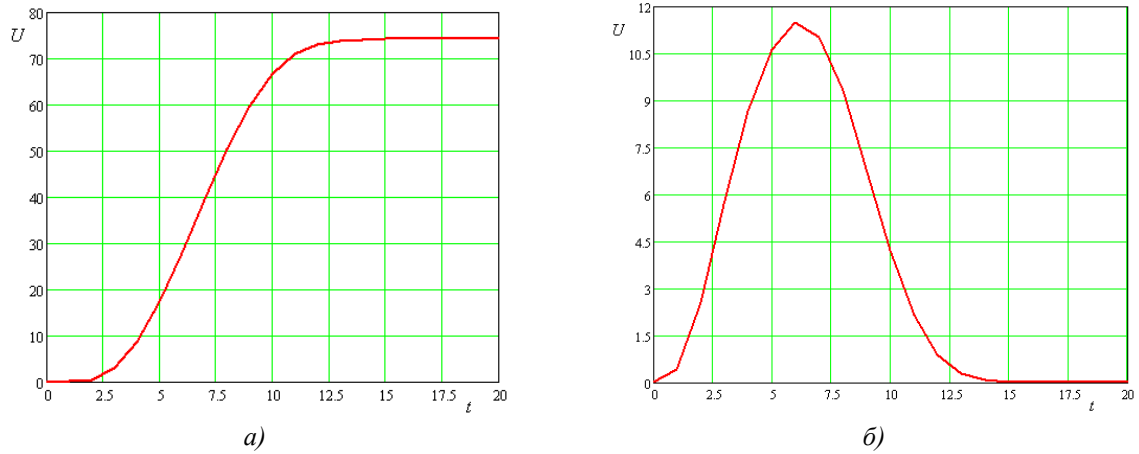


Рис.8. Теоретичні криві водовбирання а) та швидкості водовбирання б) для шару Rq на основі математичної моделі

На наступному етапі досліджень необхідні дані щодо зміни концентрації вологи на границі першого та другого шарів.

Для цього достатньо обчислити функцію $UK1 = v_1(\zeta, t)$ (рис.9а) та швидкість зміни вологи на границі з другим шаром $VK1 = v_1(\zeta, t)$ (рис. 9б).

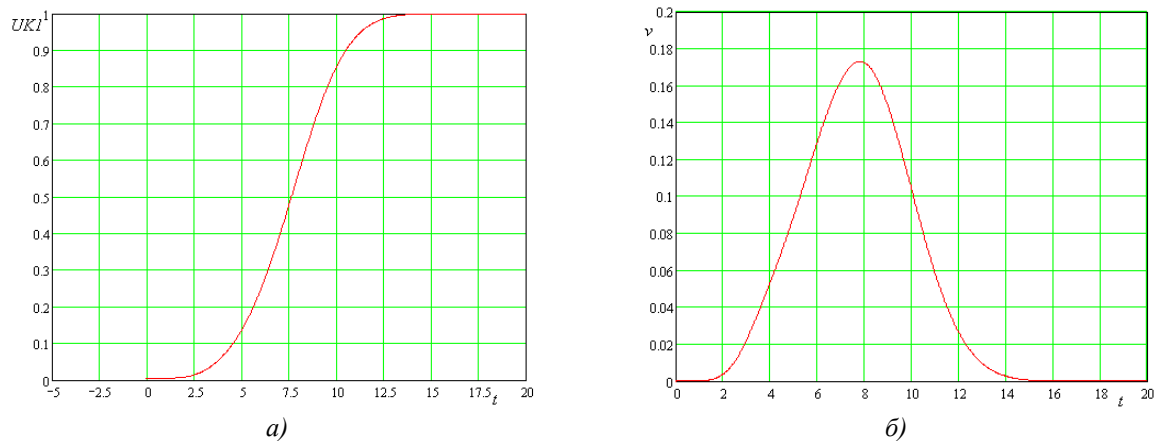


Рис. 9. Водовбирання а) та швидкість водовбирання шаром Rq б) на границі з другим шаром на основі математичної моделі

Для дослідження водовбирання по другому шару L₂, з урахування зміни водовбирання по першому шару Rq спочатку записуємо функції (1) і (2)

$$U_2(z,t) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot e^{-A_2 \zeta^{i-1} B_2^2} \cdot \sin\left[\frac{(i-1)\pi z}{2}\right]}{\pi(2i-1)}$$

$$v_2 = \frac{dU_2}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} A_2 \cdot B_2^{-1} \cdot e^{-A_2 \zeta^{i-1} B_2^2} \cdot \sin\left[\frac{(i-1)\pi z}{2}\right]$$

Записуємо функцію прирощення водовбирання по другому шару

$$f_2(z,t) = u_2(z,t) \cdot VK1(t) + v_2(z,t) \cdot UK1(t)$$

Для другого шару питома сорбція визначається як

$$u_2(z,t) = \begin{cases} u_1(\zeta, t) & 0 \leq z \leq 1 \\ \int_0^t f_2(z,t) dt, 1 < z \leq 2 \end{cases}$$

З урахуванням, що всі вхідні функції можна представити у вигляді масивів, дану функцію також знаходимо у вигляді масиву

$$u_{2,j,i} = \left\{ \begin{array}{l} u_{j,i}^1, 0 \leq j \leq n \\ \sum_{k=1}^i \frac{u_{j,k+1}^2 + f_{2,j,k}}{2 \cdot n}, 1 < j \leq 2n \end{array} \right.$$

Як бачимо, кількість елементів масиву збільшилось у два рази. Залежність зміни водовбирання по товщині перших двох шарів для різних моментів часу показано на рис. 10.

Загальне водовбирання по двох шарах матеріалу визначається як інтеграл

$$U_2(t) = U_{\max 1} \int_0^1 u_2(z,t) dz + U_{\max 2} \int_1^2 u_2(z-1,t) dz$$

Оскільки функції, які входять в підінтегральний вираз, записані у вигляді масивів, водовбирання по двох шарах визначаємо як масив

$$U_{2i} = U_{\max 1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{u_{2,j+1,i} + u_{2,j,i}}{2} \cdot \frac{j}{n} + U_{\max 2} \sum_{j=n}^{2n-1} \frac{u_{2,j+1,i} + u_{2,j,i}}{2} \cdot \frac{j}{n}$$

$v_2 = \frac{dU_2}{dt}$ або наближено $v_{2i} \approx (U_{2i+1} - U_{2i}) \cdot n$.

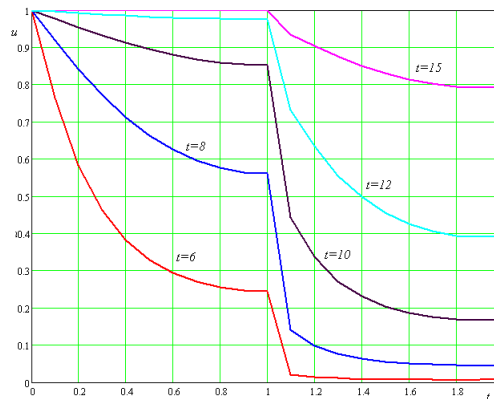


Рис.10. Зміна водовбирання по товщині двошарового матеріалу Rq+Lu для різних моментів часу

В результаті функція зміни водовбирання в часі для двох шарів має вигляд (рис. 11а), а швидкість зміни водовбирання в двох перших шарах визначається як похідна (рис. 11б)

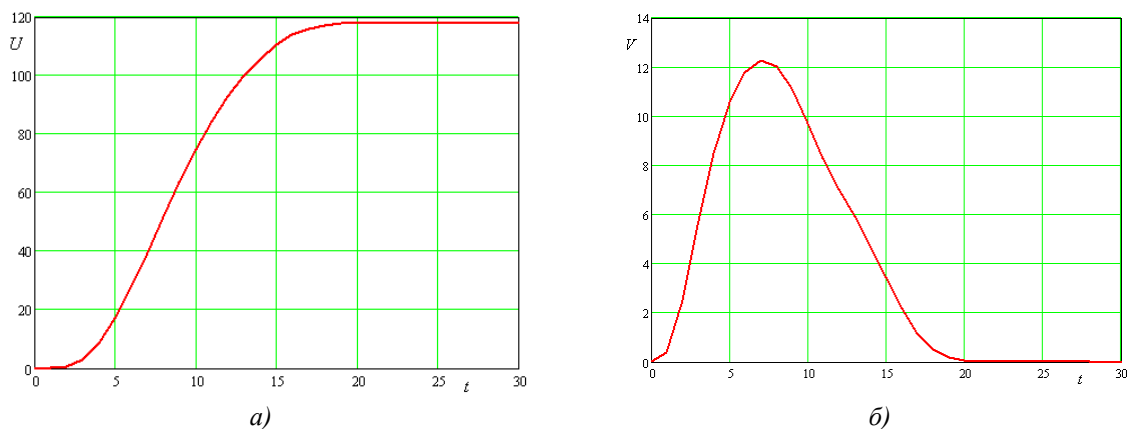


Рис.11. Водовбирання а) та швидкість водовбирання б) в двошаровому матеріалі Rq+Lu на основі математичної моделі

На границі другого і третього шару водовбирання визначається, виходячи з останнього ряду значень відповідної функції, тобто $UK_{2i} = u_{2i,2n}$ (рис. 12а). Швидкість зміни водовбирання на границі з третім шаром визначається, як $VK_2 = \frac{dUK_2}{dt}$, або наближено $VK_{2i} = (K_{2i+1} - UK_{2i}) \cdot n$ (рис. 12б))

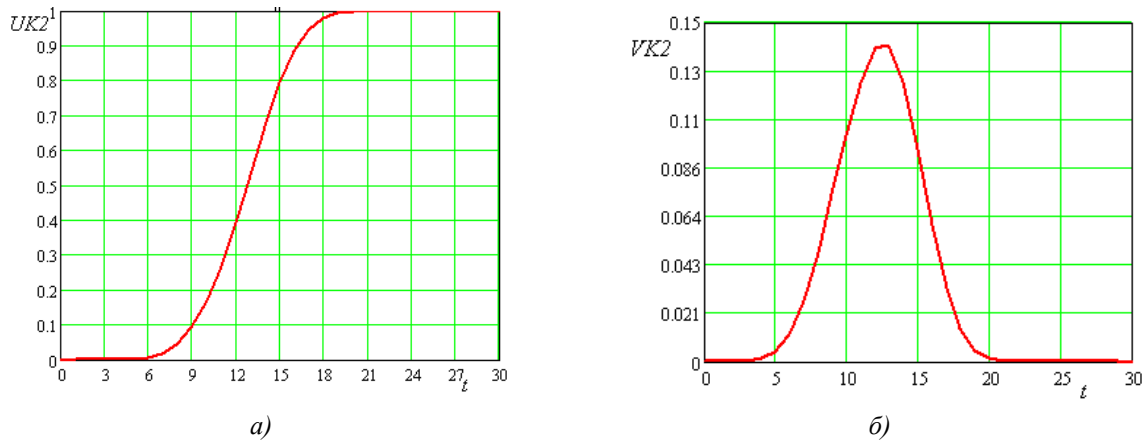


Рис.12. Вміст вологи а) та швидкість водовбирання б) на границі двошарового матеріалу Pq+Lu з третім шаром

Для дослідження водовбирання по третьому шару, з врахуванням зміни водовбирання по першому та другому шарам, спочатку запишемо функції водовбирання та швидкості водовбирання за формулами (1) і (2)

$$U_3(z,t) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot e^{-A_i} \cdot \langle i-1 \rangle^{B_i} \cdot \sin\left[\frac{\langle i-1 \rangle \cdot \pi z}{2}\right]}{\pi(2i-1)}$$

$$v_3 = \frac{dU_3}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot A_i \cdot B_i \cdot e^{-A_i} \cdot \langle i-1 \rangle^{B_i} \cdot \sin\left[\frac{\langle i-1 \rangle \cdot \pi z}{2}\right]$$

Запишемо функцію прирощення водовбирання по третьому шару

$$f_3(z,t) = u_3(z,t) \cdot VK_2(t) + v_3(z,t) \cdot UK_2(t)$$

Для третього шару питоме водовбирання визначається як

$$u_3(z,t) = \begin{cases} u_1(z,t) & 0 \leq z \leq 1 \\ \int_0^t f_2(z,\tau) d\tau & 1 < z \leq 2 \\ \int_0^t f_3(z,\tau) d\tau & 2 < z \leq 3 \end{cases}$$

Враховуючи, що всі вхідні функції можна представити у вигляді масивів, дану функцію також знайдемо у вигляді масиву

$$u_{2,j,i} = \begin{cases} u_{1,j,i}, 0 \leq j \leq n \\ \sum_{k=1}^i \frac{(u_{2,j,k+1} + f_{2,j,k}) \cdot k}{2 \cdot n}, 1 < j \leq 2n \\ \sum_{k=1}^i \frac{(u_{3,j,k+1} + f_{3,j,k}) \cdot k}{2 \cdot n}, 2n < j \leq 3n \end{cases}$$

При цьому кількість елементів масиву збільшилось у порівнянні з вихідною кількістю в три рази. Залежність зміни водовбирання по товщині для різних моментів часу для тришарового матеріалу показано на рис. 13.

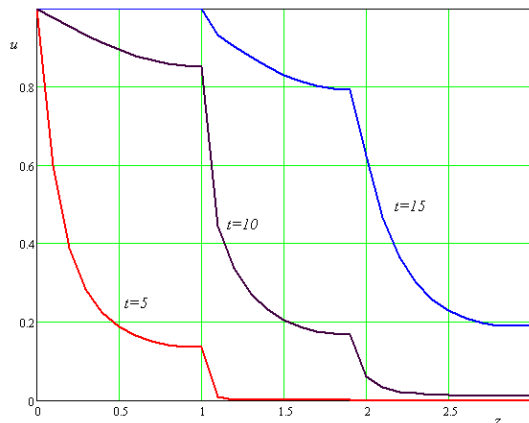


Рис. 13. Зміна водовбирання по товщині тришарового матеріалу Pq+Lu+ OST для різних моментів часу

Загальна сорбція по трьох шарах матеріалу визначається як інтеграл

$$U_2(t) = U_{\max 1} \int_0^1 u_2(z,t) dz + U_{\max 2} \int_1^2 u_2(z-1,t) dz + U_{\max 3} \int_2^3 u_2(z-2,t) dz$$

Оскільки функції, які входять в підінтегральний вираз, записані у вигляді масивів, водовбирання по трьох шарах також визначаємо як масив

$$U_2 = U_{\max 1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{u_{2,j+1,i} + u_{2,j,i}}{2} \cdot \frac{j}{n} + U_{\max 2} \sum_{j=n}^{2n-1} \frac{u_{2,j+1,i} + u_{2,j,i}}{2} \cdot \frac{j}{n} + U_{\max 3} \sum_{j=2n}^{3n-1} \frac{u_{2,j+1,i} + u_{2,j,i}}{2} \cdot \frac{j}{n}$$

Тоді шукана функція зміни водовбирання в часі для тришарового матеріалу має вигляд рис 14.

Шукана функція швидкості для тришарового матеріалу визначається як похідна $V_3 = \frac{dU_3}{dt}$ або

наближено $V_{3i} \approx (u_{3i+1} - u_{3i}) \cdot n$

Останні два графіка рис. 14 а) та рис 14 б) є очікуваними характеристиками водовбирання тришарового матеріалу Pq + Lu + OST, які одержані за відомими характеристиками для окремих шарів.

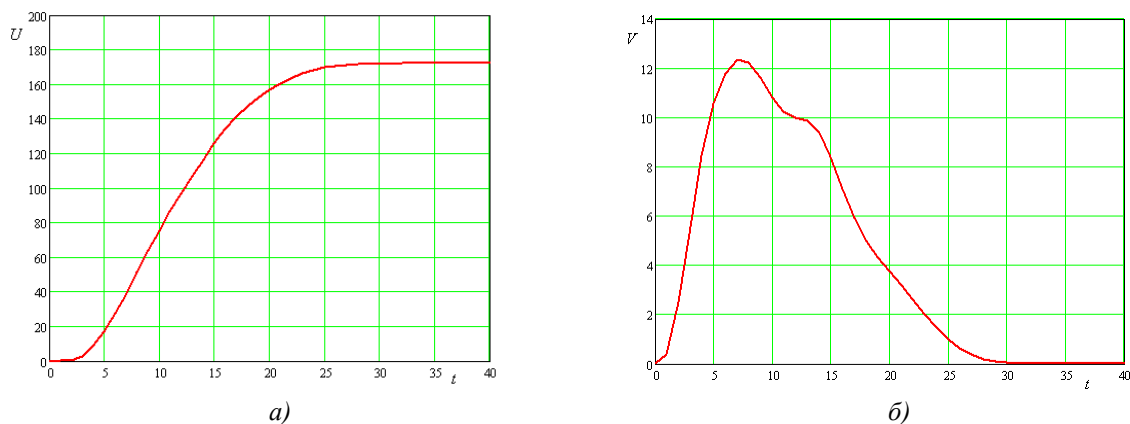


Рис. 14. Зміна вмісту вологи а) та швидкості водовбирання б) в тришаровому матеріалі Pq+Lu+OST на основі математичної моделі

Висновки

В роботі подані результати аналітичного розрахунку характеристик водовбирання тришарового матеріалу, а саме розподілу вологи по товщині багатошарової структури в залежності від часу при нестационарній дифузії вологи, який проведений з використанням запропонованої нами аналітичної моделі нестационарного водовбирання багатошарового текстильного матеріалу та методики розрахунку констант водовбирання індивідуальними шарами, що входять до багатошарової структури.

Запропоновані нами модель і методика дозволяють для будь-якого довільного елемента структури і матеріалу в цілому визначати концентрацію води, що поглинута, і прогнозувати процес водовбирання багатошаровими текстильними структурами, з урахуванням гальмування процесу водовбирання при збільшенні вмісту вологи в матеріалі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Власенко В.І. Дослідження процесу водовбирання текстильними матеріалами технічного призначення // Вісник КНУТД. – 2009. – №5. – С. 106 – 112.
2. Власенко В.І. Теоретичні дослідження процесу водовбирання текстильними матеріалами. Повідомлення 2. Напівемпірична модель водовбирання текстильних матеріалів зі змінним коефіцієнтом дифузії // Вісник КНУТД. – 2010. – №1. – С. 93 – 99.
3. Власенко В.І. Теоретичні дослідження процесу водовбирання текстильними матеріалами. Повідомлення 3. Методика визначення констант водовбирання текстильних матеріалів // Вісник КНУТД. – 2010. – №2. – С. 102 – 108.
4. Власенко В.І. Оцінка точності апроксимації експериментальних даних процесу водовбирання текстильними матеріалами. Повідомлення 5. // Вісник КНУТД. – 2011. - №1. – С. 126 – 131.
5. Власенко В.І. Аналітична модель водовбирання дво- та багатошаровими текстильними структурами. Повідомлення 4. // Вісник КНУТД. – 2010. – №3. – С. 201 - 206.

Надійшла 18.03.2011