



УДК 519.6

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Студ. Ю.А. Трейтяк, гр.БЕП1-15

Наук. керівник доц. О.Л. Блохін

Київський національний університет технологій та дизайну

Варіаційні принципи побудови математичних моделей являють собою досить загальні твердження про даний об'єкт (систему, явище) і свідчать, що з усіх можливих варіантів його поведінки (руху, еволюції) вибираються лише ті, які задовольняють певну умову. Зазвичай згідно цій умові деяка пов'язана з об'єктом величина досягає екстремального значення при його переході з одного стану в інший.

Припустимо, автомобіль, що рухається з постійною швидкістю v , повинен потрапити з точки А в точку В і при цьому торкнутися деякої прямої лінії С.

Водій автомобіля вибирає з безлічі траєкторій шлях, що вимагає мінімальних витрат часу. Уявімо витрачений час як функцію величини α - кута між прямою і відрізком шляху від точки А до прямої:

$$t(\alpha) = \frac{a}{v \sin \alpha} + \frac{b}{v \sin \beta(\alpha)}$$

Тут a і b - довжини перпендикулярів, опущених з точок А і В на пряму, $\beta(\alpha)$ - кут між прямою і відрізком шляху з точки торкання до точки В.

Умова екстремальності $t(\alpha)$ по аргументу означає, що

$$\frac{a \cos \alpha}{\sin^2} + \frac{b \cos \beta(\alpha)}{\sin^2 \beta(\alpha)} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad (1)$$

Для будь-яких значень α справедлива рівність

$$c = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{b}{\operatorname{tg} \beta(\alpha)}$$

де c - відстань між проєкціями точок А і В на пряму (однакова для всіх траєкторій).

Диференціюючи його, отримуємо співвідношення

$$\frac{a}{\sin^2 \alpha} + \frac{b}{\sin^2 \beta(\alpha)} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

яке разом з умовою мінімальності (1) означає $\cos \alpha = \cos \beta$, тобто рівність кутів α і β .

α_{min} і t_{min} знаходяться через задані величини a , b , c . Умова мінімальних витрат часу привела до вибору відповідної траєкторії за правилом "кут падіння дорівнює куту відбиття". Такому ж закону підпорядковується і хід світлового променя, що потрапляє на поверхню, що відбиває. В загальному випадку промені світла рухаються по траєкторії, що забезпечує якнайшвидше потрапляння сигналу з однієї точки в іншу. Так і відбувається згідно відомому варіаційному принципу Ферма, спираючись на який, можна отримати всі основні закони геометричної оптики.

Сформульовані стосовно якого-небудь класу явищ варіаційні принципи дозволяють одноманітно будувати відповідні математичні моделі. Їх універсальність виражається також в тому, що, використовуючи їх, можна певною мірою відволікатися від конкретної природи процесу.