УДК 539.1

УЗАГАЛЬНЕННЯ ЕРЕДИТАРНИХ ВИЗНАЧАЛЬНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ БОЛЬЦМАНА – ПІКАРА – ВОЛЬТЕРИ ДО ВРАХУВАННЯ ПРОСТОРОВОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ ТІЛ

Ю.Л. МЕНТКОВСЬКИЙ, В.П. ХОЛОД

Київський національний університет технологій та дизайну

На прикладі електродинаміки суцільних середовищ з пам'яттю побудовано нелокально-ередитарні визначальні співвідношення.

У праці [1] було побудовано ередитарні визначальні співвідношення типу Больцмана-Пікара-Вольтери для феромагнетиків та формально подібних до них фізичних систем, які добре описують петлю гістерезису. Матеріал при цьому повинен бути просторово однорідним. В даній роботі проведено узагальнення на випадок просторової неоднорідності об'єктів.

Мета роботи

Побудовано імітаційну модель [6] матеріальних співвідношень електродинаміки фізичних систем з пам'яттю, котра узагальнює попередньо запропоновану авторами модель ередитарних визначальних співвідношень (ЕВС) типу Больцмана-Пікара-Вольтери [1] для просторово однорідних систем. Нелокально-ередитарні визначальні співвідношення (НЕВС) повинні містити в собі ередитарні визначальні співвідношення типу Больцмана-Пікара-Вольтери (БПВ) як окремий випадок, оскільки просторово однорідні системи і є найпростішим окремим випадком неоднорідних. Саме цей своєрідний «принцип відповідності» фактично дає ключ до побудови імітаційних НЕВС електродинаміки фізичних систем з пам'яттю, що доповнюють рівняння Максвела для таких систем.

Постановка завдання та об'єкти дослідження

Детально пробивши ЕВС типу БПВ в задачах в'язкопружності за умов тепло-масообміну дисперсних матеріалів з термостатом [3,7], автори чітко усвідомили, що ЕВС взагалі можуть виявитись адекватним апаратом для побудови матеріальних співвідношень фізичних систем з пам'яттю; зокрема феромагнетиків, сегнетоелектриків, тощо. Звернувшись до феромагнетиків, автори випробували кілька варіантів ЕВС [8], врешті зупинившись на поданому нижче [1].

А. Строго кажучи, в [1] розглядалася задача про намагнічування тонкого феромагнітного стержня, який можна вважати одновісним. При цьому ми відібрали наступний варіант ЕВС:

$$J(t) = J_0(t) + \int_0^t K(H \mid t, \tau) J_0(\tau) d\tau. \tag{1}$$

де $j(t) \equiv j(H(t) \mid t)$ – поточна намагніченість однорідного стержня; $j_0(t) \equiv j_0(H(t))$ – основна крива намагніченості; $K(H(t) \mid t, \tau)$ – ядро ЕВС [1].

Зауважимо, що символ типу – $$y(t) \equiv y(x(t) \mid t) \tag{2}$$

означає, що «*y*» є, взагалі кажучи, функціоналом (зазвичай, інтегральним) від $x(t)$ і функцією від *t*.

Магнітне поле в (1) теж має бути тут просторово однорідним.

Б. S – подібну петлю феромагнітного гістерезиса в узгодженні з експериментом забезпечив в [1] наступний вибір ядра –

$$K(H(t)\,|\,t,\tau) = \frac{\eta_0 e^{-\alpha(t-\tau)}}{1+2\beta\left|H(t)\cdot\dot{H}(t)\right|}. \tag{3}$$

Що ж до $J_0(t)$, то побудована аналітична модель, отримана в результаті апроксимації експериментальної залежності магнітної проникності від напруженості поля (проходить через максимум, що саме і визначає структуру моделі) –

$$J_0(t) = A\cdot th(aH(t)) - B\cdot th(bH(t)), \tag{4}$$

де $H=H(t)$ – змінна в часі напруженість однорідного зовнішнього магнітного поля; A, a, B, b – сталі коефіцієнти, котрі не потребують фізичної інтерпретації, оскільки визначаються чисельно за експериментальними кривими. Отже в феноменології $J_0(t)$ фактично береться з експерименту.

Результати та їх обговорення

Виходячи з досвіду роботи з ЕВС та НЕВС в теорії в'язкопружності дисперсних матеріалів за умов їх тепломасообміну з термостатом [3,7], пропонуємо для неоднорідного феромагнітного тонкого стержня довжини l_0 НЕВС наступного вигляду –

$$J(x,t) = J_0(x,t) + \int_0^t d\tau \int_0^{l_0} d\xi K(H\,|\,t,\tau;x,\xi) J_0(\xi,\tau) \qquad (x,\xi \in [0,l_0]). \tag{5}$$

Функції $J_0(x,t)$ та $K(H\,|\,t,\tau;x,\xi)$, що входять до (5), поки що не будемо конкретизувати.

Для загальності магнітне поле теж будемо вважати просторово неоднорідним –

$$H = H(x,t). \tag{6}$$

Розглянемо наступні усереднення вздовж стержня :

$$\begin{cases} \bar{J}(t) \equiv \dfrac{1}{l_0}\displaystyle\int_0^{l_0} J(x,t)dx; \\ \bar{J}_0(t) \equiv \dfrac{1}{l_0}\displaystyle\int_0^{l_0} J_0(x,t)dx; \end{cases} \tag{7}$$

а також усереднене за x ядро –

$$\bar{K}(H\,|\,t,\tau;\xi) \equiv \frac{1}{l_0}\int_0^{l_0} K(H\,|\,t,\tau;x,\xi)dx. \tag{8}$$

Середні (7), (8) цікаві тим, що для просторово однорідних стержня і магнітного поля, коли усі функції в (5) не залежать від координат, середні (7), (8) співпадають з вихідними; тобто не усередненими. Цей важливий факт буде використано в пункті «5».

Використаємо тут згаданий в пункті «2» своєрідний «принцип відповідності».

Насамперед відзначимо, що завдяки (7), (8), усереднюючи (5), отримаємо –

$$\bar{J}(t) = \bar{J}_0(t) + \int_0^t d\tau \int_0^{l_0} d\xi \bar{K}(H \mid t, \tau; \xi) J_0(\xi, \tau). \qquad (9)$$

Нехай тепер стержень і магнітне поле є просторово однорідними; тобто:

$$\begin{cases} J_0(x,t) \equiv J_0(t); \quad K(H \mid t, \tau; x, \xi) \equiv Q(H \mid t, \tau); \\ \bar{K}(H \mid t, \tau; \xi) \equiv \bar{Q}(H \mid t, \tau); \quad H(x,t) \equiv H(t). \end{cases} \qquad (10)$$

Тоді з урахуванням того, що при цьому $\bar{J}(t) = J(t)$ і $\bar{J}_0(t) = J_0(t)$, (9) буде еквівалентним наступному співвідношенню:

$$J(t) = J_0(t) + \int_0^t l_0 \bar{Q}(H \mid t, \tau) J_0(\tau) d\tau. \qquad (11)$$

Згадуючи останнє зауваження пункту «4» та аналізуючи викладки, виконані вище, бачимо, що (11) повертає нас до ЕВС (1) при наступному ототожненні –

$$l_0 \bar{Q}(H \mid t, \tau) \equiv K(H \mid t, \tau) \qquad (12)$$

Або, зважаючи на (3), матимемо –

$$\bar{Q}(H \mid t, \tau) = \frac{1}{l_0} K(H \mid t, \tau) = \zeta \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{1 + 2\beta \left| H(t) \cdot \dot{H}(t) \right|}, \qquad (13)$$

де
$$\zeta = \frac{\eta_0}{l_0}. \qquad (14)$$

Очевидно, ζ слугує питомим (віднесеним до одиниці довжини) значенням коефіцієнта запізнювання [8]. Саме він і може бути табульованим. Що ж до інших параметрів ядра (3) в (5), тобто до α і β, то тут ще треба виконати суттєвий аналіз, варіант якого наведено нижче.

Природньо припустити, що α і β (13), (18) залежать від ξ:

$$\alpha = \alpha(\xi), \quad \beta = \beta(\xi).$$

Та, якщо неоднорідність матеріалу є слабкою, то ці функції напевне можна замінити ефективними константами, вважаючи їх параметрами теорії. Проте, універсальні рекомендації тут навряд чи можливі.

Та, не зважаючи на цю обставину, можна все ж звернутись до побудови імітаційного ядра $K(H \mid t, \tau; x, \xi)$ (5). Щоправда, це просто зробити лише за умови просторової однорідності зовнішнього магнітного поля: $H(x,t) \equiv H(t)$.

З (12), (13), (14) випливає адитивність коефіцієнта запізнювання η_0 (3) щодо довжини. Тому для просторово неоднорідного стержня можна запровадити локальний питомий коефіцієнт запізнювання за зразком, наведеним в [3]:

$$\zeta(\xi, t) \equiv \frac{d\eta_0(\xi, t)}{d\xi} \qquad (15)$$

і записати в такому разі замість (5) співвідношення наступного вигляду –

$$j(x,t) = j_0(x,t) + \int_0^t d\tau \int_0^l d\xi R(H \mid t,\tau;x,\xi)\zeta(\xi,\tau)\, j_0(\xi,\tau) \tag{16}$$

при зрозумілому позначенні:

$$K(H \mid t,\tau;x,\xi) \equiv R(H \mid t,\tau;x,\xi)\zeta(\xi,\tau)\,. \tag{17}$$

Оскільки ж мають місце закономірності (9) – (13), то можна запропонувати наступне імітаційне ядро для (5):

$$K(H \mid t,\tau;x,\xi) = N(\xi) f(|\, x-\xi\,|)\zeta(\xi,\tau)\frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{1+2\beta\,|\, H(t)\dot{H}(t)\,|}\,. \tag{18}$$

Функція $f(|\, x-\xi\,|)$ враховує кореляцію намагніченостей в точках x і ξ. Природньо вважати, що така функція кореляції монотонно спадає із зростанням за модулем аргумента:

$$\lim_{|x-\xi|\to\infty} f(x-\xi) = 0\,. \tag{19}$$

Звичайно, якісні наслідки з (18), (19) вимагають зіставлення з експериментом. Але перед тим варто зробити ще деяку деталізацію.

З (18) випливатиме (13), якщо зажадати виконання наступної умови –

$$\frac{N(\xi)}{l_0}\int_0^{l_0} f(|\, x-\xi\,|)dx = 1\,. \tag{20}$$

При цьому цікаво розглянути конкретний приклад вибору $f(|\, x-\xi\,|)$. Нехай

$$f(|\, x-\xi\,|) \underset{\gamma>0}{=} e^{-\gamma|x-\xi|} = \begin{cases} e^{-\gamma(x-\xi)}, & \text{коли } x>\xi; \\ e^{-\gamma(\xi-x)}, & \text{коли } x<\xi \end{cases}. \tag{21}$$

Тоді для $N(\xi)$ (20) отримуємо

$$\begin{gathered} N(\xi) = \gamma l_0\{2-(e^{-\gamma\xi}+e^{-\gamma(l_0-\xi)}\}^{-1} \\ (0\le\xi\le l_0) \end{gathered}\,. \tag{22}$$

Висновки

Варіант імітаційного ядра цим самим побудовано. Можливі й інші варіанти. Вони підлягають апробації на конкретних фізичних прикладах на відповідність експерименту. Узагальнення теорії на довільні просторові конфігурації і структури феромагнетиків не вносять принципових, а лише технічні ускладнення. Попередні дослідження (див. літературу) вказують на адекватність таких теоретичних побудов, що дає їм право на існування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Mentkovsky Yu.L. and Kholod V.P. // Ukr. Journ. of Physics, V.54, №4, 2009.
2. Полищук Е.М. – Вито Вольтерра – Л.: Наука, 1977.
3. Луцык Р.В., Ментковский Ю.Л., Холод В.П. – Теория и практика физических систем с памятью. – Киев: КНУТД, 2006.
4. Шен И.Р. – Принципы нелинейной оптики – М.: Наука, 1988.
5. Дей У.А. – Термодинамика простых сред с памятью – М.: Мир, 1974.

6. Ментковский Ю.Л. // Укр. физ. журн. Т.36, №6, 1991.
7. Р.В. Луцык, Ю.Л. Ментковский, В.П. Холод. – Взаимосвязь деформационно-релаксационных и тепломассообменных процессов. – К.: Вища школа, 1992.
8. Арнольд В.И. – «Жёсткие» и «мягкие» математические модели. Copyright 2000 – 2002, РОО «Мир Науки и Культуры». ISSN 1684 – 9876.

Надійшла 24.09.2010