УДК 658.51.012

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

О.М. ПИГНАСТЫЙ

Национальный технический университет «ХПИ»

Используя статистический подход, который широко распространен в естественных науках, построена модель производственно-технической системы. Состояние производственно-технической системы задается множеством предметов труда. Состояние предмета труда задано точкой в фазовом технологическом пространстве. Введена функция распределения предметов труда по состоянию и записано кинетическое уравнение для функции распределения. Записана замкнутая система динамических уравнений (уравнений баланса) для моментов функции распределения, где моменты функции распределения есть макропараметры производственно-технической системы

Разнообразие и сложность технологии изготовления продукта создает предпосылки к моделированию технологического процесса производственно-технической системы на основе представления о нем как о совокупности предметов труда, находящихся в разных стадиях технологической обработки [1– 6]. Однако, следить за поведением отдельно взятого предмета труда из-за их весьма большого количества и вероятностного характера воздействия на предмет труда технологического оборудования практически невозможно [4,5]. Эффективным подходом к моделированию больших систем является статистический подход, рассматривающий технологический процесс на двух уровнях описания – микроуровне и макроуровне. На микроуровне исследуются закономерности поведения отдельных элементов системы, на макроуровне – их агрегированные характеристики и связи между этими характеристиками. Взаимосвязь между уровнями осуществляется через кинетическое уравнение. Особенностям применения статистического подхода к моделированию производственно-технических систем посвящена настоящая статья

Результаты и их обсуждение

1.МИКРООПИСАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

В ходе выполнения технологической операции на предмет труда переносится стоимость технологических ресурсов путем целенаправленного воздействия технологического оборудования [2]. На каждой операции неизбежно появляются колебания геометрических характеристик, физико-механических свойств материалов, которые обусловлены комплексом случайных и систематических производственных факторов. Таким образом, технологический процесс есть случайный процесс перехода предметов труда из одного состояния в другое в результате воздействия технологического оборудования. Его состояние определяется как состояние числа N предметов труда [6]. Состояние предмета труда в момент времени t может быть представлено координатами в фазовом технологическом пространстве (t, S, μ) [2,6]: суммой затрат S_{j}(грн), и интенсивностью переноса затрат в единицу времени μ_j (грн/час) от технологического оборудования на j-й предмет труда, 0<j<N. Координаты S_{j} и μ_j определяют в фазовом технологическом пространстве технологические траектории предметов труда $\mathrm{S}_{\mathrm{j}} = \mathrm{S}_{\mathrm{j}}(t)$. Интенсивность μ передачи затрат $\Delta S = \Delta S(t)$ от средств

труда на j-й предмет труда за время выполнения технологической операции Δt является случайным процессом [2,4,6], значение которого в фиксированный момент времени определяется случайной величиной:

$$\mu = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \qquad (1)$$

Состояние системы в некоторый момент времени будет определено, если определены микропараметры S_j и μ_j, а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояния параметров предмета труда:

$$\frac{dS_j}{dt} = \mu_j, \qquad \frac{d\mu_j}{dt} = f_j(t,S), \qquad (2)$$

$f_j(t,S)$ – производственная функция для технологического оборудования. Если количество предметов труда много больше единицы, то решить систему (2) из 2N – уравнений практически невозможно. Вместо рассмотрения состояния предметов труда технологического процесса с параметрами S_j и μ_j, введем нормированную функцию распределения предметов труда по состояниям. Каждая точка в данном пространстве будет задавать состояние предмета труда. Разумно ожидать, что при больших N эту функцию будет хорошо аппроксимировать непрерывная функция распределения предметов труда по состояниям $\chi(t,S,\mu)$.

2.КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Разобьем фазовое пространство на такое число ячеек, чтобы размеры ячейки $\Delta\Omega = \Delta \mathrm{S} \cdot \Delta\mu$ были много меньше значений характерных параметров производственно-технической системы и в то же время содержали внутри себя большое число предметов труда. Вместо того, чтобы фиксировать точные значения параметров предметов труда, будем приближенно характеризовать состояние производственно-технической системы числом предметов труда в каждой ячейке $\Delta\Omega$. Если размеры ячейки достаточно малы, то приближенное описание будет нести в себе почти столь же подробную информацию, что и точное. В силу того, что величина $\chi(t,S,\mu)\cdot d\Omega$ представляет собой число предметов труда в бесконечно малой ячейке $\Delta\Omega$ фазового технологического пространства, мы можем по изменению фазовой координаты S и фазовой скорости μ, судить и об изменении самой функции $\chi(t,S,\mu)$:

$$\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t} + \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial S}\cdot\mu + \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial\mu}\cdot f(S) = \mathrm{J}(t,S,\mu), \quad \frac{dS}{dt} = \mu; \qquad \frac{d\mu}{dt} = f(S), \qquad (3)$$

Уравнение (3) описывает изменение усредненных по бесконечно малой ячейке фазового технологического пространства $\Delta\Omega$ характеристик предметов труда S_j, μ_j. Будем считать функцию $\chi(t,S,\mu)$ нормированной

$$\int_0^\infty d\mathrm{S}\cdot\int_0^\infty d\mu\cdot\chi(t,S,\mu) = N. \qquad (4)$$

Производственная функция $f(t,S)$ определяется из заданного способа производства. При перемещении вдоль технологического на предмет труда оказывается воздействие со стороны оборудования маршрута, расположенного с плотностью $\lambda(S)$. Мы можем говорить только о вероятности того, что после такого воздействия предмет труда будет находиться в том или ином состоянии. Этот вероятностный характер воздействия можно учесть, задав функцию $\psi(t,S,\mu)$, определяющую вероятность, что после воздействия предмет труда будет потреблять технологические ресурсы с интенсивностью μ. Функцию $\psi(t,S,\mu)$ можно задать, анализируя паспортные данные технологического оборудования:

$$\int_0^\infty \psi(t,S,\mu)\cdot d\mu = 1,$$

$$\int_0^\infty \mu^k \cdot \psi(t,S,\mu)\cdot d\mu = [\psi]_k, \qquad k = 1,2.... \tag{5}$$

Количество предметов труда, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования в ячейке $d\mathrm{S}\cdot d\mu$ с координатами (S,μ) и переместившихся в результате воздействия в ячейку $d\mathrm{S}\cdot d\tilde{\mu}$ с координатами $(S,\tilde{\mu})$, пропорционально произведению потока предметов труда $\chi(t,S,\mu)\cdot\mu$ на вероятность перехода $\psi(t,S,\tilde{\mu})\cdot d\tilde{\mu}$. Число предметов труда, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования и принявшие значения в пределах $(\tilde{\mu};\tilde{\mu}+d\tilde{\mu})$ есть величина $\psi(\tilde{\mu})\cdot\lambda(S)\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\cdot d\tilde{\mu}\cdot d\mathrm{S}\cdot d\mu$. Наряду с этим в элемент объема $d\mathrm{S}\cdot d\mu$ поступают предметы труда из объема $d\mathrm{S}\cdot d\tilde{\mu}$ путем обратного перехода в количестве $\psi(\mu)\cdot\lambda(S)\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})\cdot d\tilde{\mu}\cdot d\mathrm{S}\cdot d\mu$, а общее число предметов труда в элементе объема $d\mathrm{S}\cdot d\mu$ изменяется в единицу времени на величину $d\mathrm{S}\cdot d\mu\cdot J$:

$$J = \lambda(S)\cdot\int_0^\infty \{\psi(\mu)\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu}) - \psi(\tilde{\mu})\cdot\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\}d\tilde{\mu}. \tag{6}$$

Откуда кинетическое уравнение (3) можно представить в виде:

$$\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t} + \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial S}\cdot\mu + \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial\mu}\cdot f = \lambda\cdot\left\{\int_0^\infty \psi(\mu)\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})d\tilde{\mu} - \mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right\} \tag{7}$$

В большинстве практических случаях функция $\psi(t,S,\mu)$ не зависит от состояния предметов труда до испытания воздействия со стороны оборудования, откуда

$$\frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial t}+\frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial S}\cdot \mu+\frac{\partial \chi(t,S,\mu)}{\partial \mu}\cdot f=\lambda(S)\cdot\{\psi(\mu)\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\}. \qquad (8)$$

Решение уравнения (8) предоставляет возможность вычислить значения макропараметров технологического процесса, связано со большими трудностями [4].

3.МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Состояние технологического процесса на макроуровне будем описывать моментами функции распределения предметов труда по состояниям $\chi(t,S,\mu)$:

$$\int_0^\infty \mu^k\cdot\chi(t,S,\mu)d\mu=[\chi]_k, \qquad k=0,1,2.... \qquad (9)$$

Известно [1,2,7], что для описания состояния производственных систем на макроуровне используют два первых момента (9). Нулевой и первый моменты функции распределения предметов труда по состояниям μ (9) имеют производственную интерпретацию: это заделы предметов труда и их темп движения вдоль технологической цепочки [1,2,4]. Умножив уравнение (8) на μ^k, $k=0,1,2....$ и проинтегрировав по всему диапазону μ, получим незамкнутые уравнения балансов состояния макропараметров производственно-технической системы:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=\int_0^\infty d\mu\cdot J,$$

$$\frac{\partial[\chi]_k}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_{k+1}}{\partial S}=k\cdot f(t,S)\cdot[\chi]_{k-1}+\int_0^\infty d\mu\cdot\mu^k\cdot J, \qquad k=1,2,3..... \qquad (10)$$

Если усредненная стоимость ресурсов $\langle \Delta S\rangle$, перенесенных в ходе выполнения технологической операции на предмет труда значительно меньше себестоимость конечного продукта S_d, что характерно для технологического процесса, состоящнго из большого количества технологических операций, балансовые уравнения (10) в нулевом приближении по малому параметру $\langle \Delta S\rangle / S_d << 1$ примут вид:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=0, \qquad \frac{[\chi]_k}{[\chi]_1}=[\psi]_{k-1},$$

$$\frac{\partial[\chi]_k}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_{k+1}}{\partial S}=k\cdot f(t,S)\cdot[\chi]_{k-1}, \qquad k=1,2,3..... \qquad (11)$$

Система балансовых уравнений (11) является замкнутой. Для производственно-технической системы, макросостояние которой описывается двумя параметрами – заделом предметов труда на технологической операции и их темпом движения, система балансовых уравнений (12) может быть записана как

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=0,$$

$$\frac{[\chi]_2}{[\chi]_1}=[\psi]_1\,,$$

$$\frac{\partial[\chi]_1}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_2}{\partial S}=f(t,S)\cdot[\chi]_1\,. \qquad (12)$$

Уравнения (12) описывают состояние технологического процесса через параметры - заделы предметов труда и их темп движения по технологическому маршруту.

Выводы

На первый взгляд можно было бы заключить, что с увеличением числа элементов невообразимо возрастают сложность производственно-технической системы и в ее поведении не найти и следов какой-то закономерности. Исследование производственно-технических систем, состоящих из весьма большого количества находящихся в технологическом процессе предметов труда, позволили выявить важную принципиальную особенность таких систем. Она заключается в том, что поведение подобных производственно-технических систем определяется закономерностями особого типа, получившими названия статистических закономерностей. Важность применения статистического подхода состоит в том, что он дает «упрощенный механизм» для описания макроскопических характеристик производственно-технических систем. Во многих случаях, представляющих практический интерес, такого описания вполне достаточно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. М.: Прогресс, 1961. – 341с.
2. Шкурба В.В. и др. Планирование дискретного производства в условиях АСУ. – К.: Техника, 1975, 296 с.
3. Вильсон А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем: Пер.с англ. – М.:Наука, 1978г. – 248 с.
4. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Теория моделей в процессах управления (Информационный и термодинамический аспекты). – М.: Наука, 1978. – 224 с.
5. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием: В 2 ч. – М.: Высш. шк., 1979. – Ч. 2: Внутризаводское планирование. – 232 с.
6. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. Учеб. Пособие для втузов. – 2-е изд., – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.

Надійшла 08.11.2010