УДК 517.5

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ЦЕНТРУ МАС ФІГУРИ

Студ. М.П. Мартиненко, гр. БА2-16
Студ. Д.О. Пашкевич, гр. БА2-16
Науковий керівник В.В. Шкапа
Київський національний університет технологій та дизайну

Мета і завдання. Мета: Розкрити особливості застосування визначеного інтегралу для вирішення фізичних і математичних задач.
Завдання: Пояснити можливості використання визначеного інтегралу і його основних властивостей у вирішенні задач про знаходження центру мас фігури.

Об'єкт дослідження. Фізична задача про знаходження декартових координат центру мас фігури обмеженою правою петлею лемніскати Бернуллі. Фізичний зміст інтегралів.

Методи та засоби дослідження. Властивості та методи інтегрування. Визначений інтеграл, його властивості й функції.

Наукова новизна та практичне значення отриманих результатів. Розширено застосування математичних методів до певних задач механіки.

Результати дослідження.

Знайдемо декартові координати центру мас фігури обмеженою правою петлею лемніскати Бернуллі

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

Легко бачити, що фігура симетрична відносно полярної осі, тобто відносно осі Ох. Таким чином, центр мас лежить на цій осі.(Рис.1)

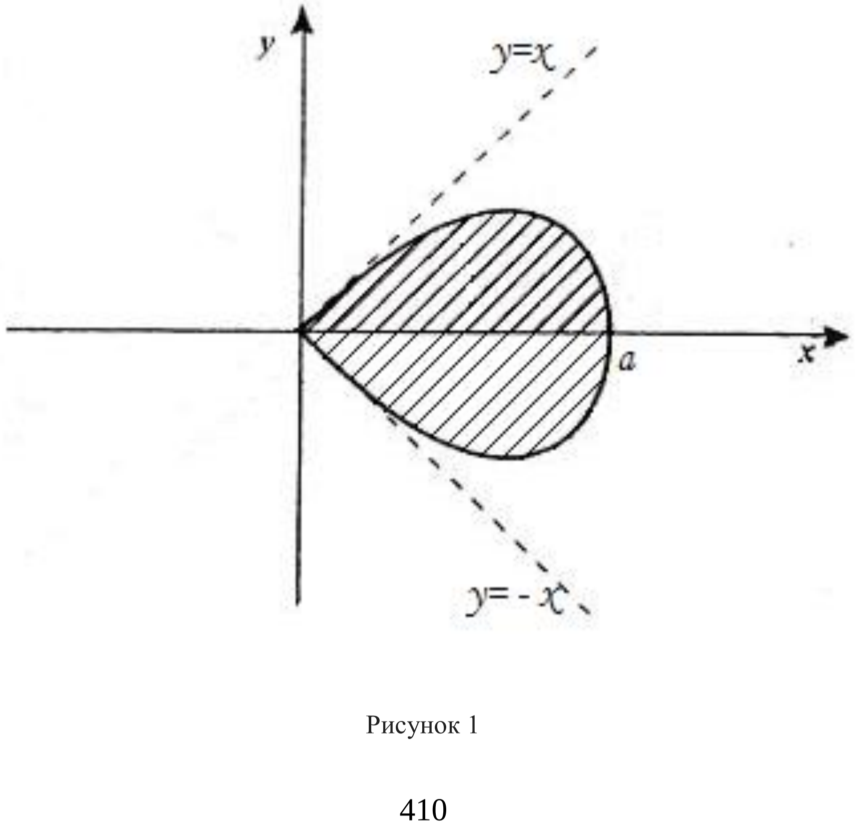

Рисунок 1

Статичний момент правої петлі відносно осі *Oy*

$$M_y = \frac{1}{3}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} p^3 \cos\varphi d\varphi$$

Отже, для даної задачі, маємо

$$M_y = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^3 \cos^{\frac{3}{2}}2\varphi \cos\varphi d\varphi = \frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} d\sin\varphi$$

Введемо заміну: $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$, тоді

$$M_y = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}a^3\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}a^3\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 4t\right) dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}a^3\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}t + 2\sin 2t + \frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{3\pi}{16}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi a^3$$

Маса визначається як інтеграл:

$$M = \frac{1}{2}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} p^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}$$

Звідси координати центру мас:

$$\xi = \frac{M_y}{M} = \frac{\pi a\sqrt{2}}{8}, \qquad \eta = \frac{M_x}{M} = 0$$

Отже, центр мас фігури знаходиться на осі *Ox* у точці С $\left(\frac{\pi a\sqrt{2}}{8}, 0\right)$.

Висновки. Через знаходження декартових координат центру мас фігури обмеженою правою петлею лемніскати Бернуллі, досліджено ще одне застосовування визначеного інтеграла.

Ключові слова. Визначений інтеграл, центр мас фігури, лемніската Бернуллі.